中国科学技术大学 21世纪教改系列教材

群与代数表示引论

冯克勤　章　璞　李尚志　编著

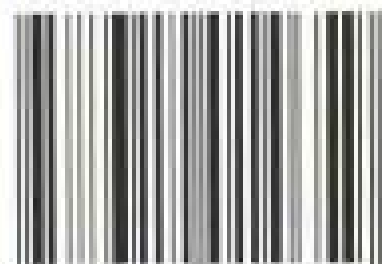
中国科学技术大学出版社

责任编辑：李攀峰
封面设计：刘俊霞



中国科学技术大学21世纪教改系列教材

群与代数表示引论



ISBN 7-312-01465-8/O·263
定价：15.00元

中国科学技术大学21世纪教改系列教材

群与代数表示引论

冯克勤　章　璞　李尚志　编著

中国科学技术大学出版社

2003 · 合肥

内 容 简 介

本书介绍群与代数表示的基本理论与方法，侧重于有限群的常表示理论和有限维半单代数的表示理论．在强调线性代数方法的同时，也突出体现了群表示与代数表示的联系．

本书假定读者学过线性代数和近世代数．

本书可作为数学系研究生公共基础课教材和高年级本科生选修课教材，也可作为相关专业的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

群与代数表示引论／冯克勤，章璞，李尚志编著． — 合肥：中国科学技术大学出版社，2003.1

（中国科学技术大学21世纪教改系列教材）

ISBN 7-312-01465-8

I. 群 ··· II. ①冯 ··· ②章 ··· ③李 ··· III. ①群论 — 高等学校 — 教材 ②代数表示 — 高等学校 — 教材 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 086815 号

中国科学技术大学出版社出版发行
（安徽省合肥市金寨路 96 号，230026）
合肥学苑印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本：850×1168/32　印张：10.25　字数：266 千
2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—2000 册
ISBN 7-312-01465-8/O·263　定价：15.00 元

前 言

1828 年， 17 岁的 E. Galois 发现 5 次和 5 次以上代数方程的根式可解性是由这个方程导出的某种代数结构的性质 (即现今称为方程的 Galois 群的可解性) 所决定的. 这一天才的发现不仅预示着以代数结构为研究对象的近世代数的开始，更重要的是，由于群能够描述自然界基本规律之一的对称性，从而成为现代科学中最核心的数学概念和工具之一. 杨振宁先生曾经说过：“群论的美妙和它在物理中应用的深入对我后来的工作有决定性的影响.”

群对称是现代数学的灵魂，而研究群对称的基本工具是群表示论. 从现代代数学的观点来看，研究一个代数结构，除了直接了解其内部构造和性质外，有效的方法是让这个代数结构 (例如群或域上的代数) “作用” 在另一个相对简单的结构上 (例如集合或向量空间)，通过考察这种作用的效果而达到理解这个代数结构本身的目的. 这一想法就是表示论的原始思想. 它在后来的发展中如此重要和富有成果，以至于现代表示论不仅以其优美和在数学的众多分支中的应用而别具魅力，而且在物理学、化学、天文、建筑、信息与通信乃至找矿等自然科学与技术领域里都有广泛的应用. I. Gelfand 曾说过：“All of mathematics is some kind of representation theory.” E. Vinberg 曾称：“The theory of linear representations of groups is one of the most widely applied branches of algebra.”

在代数结构的表示中，群与代数的表示最为基本，两者之间

的联系和相互影响也很直接. 在历史的发展中, 有几个里程碑是值得回顾的.

1843 年, W. R. Hamilton 发现四元数代数, 被认为是有限维代数的起源; 而 1896 年, F. G. Frobenius 发现有限群的特征标理论, 标志着群表示论的诞生.

有限群表示论在发展的初期就显示出在群结构中的应用, W. Burnside 于 1904 年用特征标理论证明的关于 p^aq^b 阶群的可解性定理直到 1972 年才有纯群论的证明; 更令人惊奇的是, Frobenius 关于真正规子群存在的一个充分条件至今尚无纯群论的证明.

1905 年, Frobenius 的学生 I. Schur 利用现今称为 Schur 引理的工具对 Frobenius 的工作作了系统的简化, 其方法是线性代数的.

1908 年, J. H. M. Wedderburn 建立了现在称为 Wedderburn-Artin 定理的半单代数的基本理论; 到了 1929 年, E. Noether 在她的奠基性长文《Hyperkomplexe Grössen und Darstellungs Theorie》中用有限维代数上的模统一了有限群的常表示和有限维半单代数的表示. 在以 E. Noether, E. Artin 和 R. Brauer 为首的德国学派的工作中, 半单代数及其表示取得现代的形式, 并大部分地推广到具有降链条件的环上.

而在 20 世纪 20 年代中期, Schur 和 H. Weyl 将有限群的表示理论推广到紧群上, 开始了无限连续群的连续表示的研究. Peter-Weyl 定理推广了著名的 Fourier 展开定理, 成为紧群上调和分析的基础.

1935 年, Schur 的学生 Brauer 开创了有限群模表示论的研究, 即在特征整除群的阶的域上的有限群表示论, 这为有限单群的分类提供了工具上的准备. 有限群模表示论至今仍是数学中十分活跃的重要领域.

1956 年, N. Jacobson 出版了《Structure of Rings》一书, 实际上也将有限维代数的理论推广到了无限维代数上. 在群的模表示论和非半单代数的表示中, 仅仅研究不可约表示是远远不够的, 而需要研究不可分解表示. Jordan-Hölder 定理和 Krull-Schmidt-Remark 定理对于非半单代数的表示是两条基本的定理.

一方面, Brauer 和 R. M. Thrall 于 1940 年左右关于 Brauer-Thrall 猜想 (即如果有限维代数 A 上的不可分解表示的维数是有界的, 则 A 是有限表示型, 即 A 仅有有限多个不可分解表示) 刺激了现代代数表示论的发展; M. Auslander 和 A. V. Roiter 分别于 1974 年和 1968 年用不同的方法独立解决了 Brauer-Thrall 猜想, 被认为是现代代数表示论的开始. 另一方面, Auslander 和 I. Reiten 关于几乎可裂序列的理论反过来在有限群的模表示论中又起着重要的作用. 这种交叉式的发展在群与代数表示中显得十分突出.

自 1991 年起, 我们在中国科学技术大学数学系为研究生开设"群与代数表示引论"公共基础课, 本书是在讲稿基础上反复修改而成的.

虽然用半单代数上的模统一地处理有限群的常表示和有限维半单代数上的表示更为简洁, 但考虑到听众不仅有数学系的研究生和高年级本科生, 也有其它系的研究生和高年级本科生, 我们选择了只用线性代数, 开门见山地讲述群表示的基本概念和特征标理论. 实践表明, 这种处理无需很多预备知识就可直接进入表示论, 易于理解, 同时也体现出线性代数与表示论的直接联系. 待到前两章结束后, 再系统地介绍有限维代数上的模, 这时学生已有较多的感性认识, 同时也为讲述诱导表示提供了一般的语言和工具.

本书是群与代数表示的基础教材，对于有限群的表示，只涉及常表示论，当然，也通过例子说明了常表示与模表示的本质区别；对于有限维代数的表示，只介绍基本的理论，未涉及现代 (非半单) 代数表示论；对于紧群的表示，只介绍紧致拓扑群的表示，未触及紧 Lie 群的表示．在处理方法上，前两章中我们强调线性代数的方法，而在后三章中则试图体现群与代数表示的联系和相互影响．在流行的群表示论教科书中，J. P. Serre 的书 [S] 是用线性代数写成的，但仅对复表示而言．尽管从复表示到一般的常表示没有本质的困难，但我们还是乐意作若干改变，将前两章的结果叙述成一般常表示的形式，而仍然保持线性代数的写法不变．

全书共分 6 章．第 1 章介绍群表示的基本概念，第 2 章讲述特征标理论，第 3 章是关于代数上的模，第 4 章讲述诱导表示与诱导特征标，第 5 章证明了 Brauer 和 Artin 关于诱导特征标和有理特征标的定理以及另外几个重要的定理，第 6 章介绍紧群上的表示．

本书力求条理清晰，通俗易懂；讲清思想、方法和线索；体现群与代数表示的联系；配以较多例题；几乎每节后都有难度适中的习题，有的是很重要的结论．我们鼓励读者做完这些习题，较难的习题均配有提示．

本书可作为高等学校数学系研究生和高年级本科生 “群与代数表示” 课程的教材，一学期周 4 或周 3 学时，亦可作为相关专业的参考书．带星号的内容可略去不讲．

在成书的过程中，主要参阅了 [AB], [CR2], [D], [Jac], [I], [S], [Sim], [Vin], 曹锡华 - 时俭益 [CS], 丘维声 [Q], 曹锡华 - 叶家琛 [CY] 等文献．

刘绍学教授对于本书的写作始终给予热情的鼓励，并提出宝

贵意见. 成书过程中得到程艺教授的支持和龚升教授的关心. 各届同学也对讲稿提出了修改之处, 例如徐松昀、黄华林、李立彬、李锦嘉、宋柏林、孙建华、许彬、方明、储诚浩、郭学军、叶郁、傅广宇、王艳华、陈小伍、杜家春等, 特别是武清宇协助仔细校对. 余华敏女士耐心地打印了本书的初稿.

本书的写作得到中国科学技术大学教务处和研究生院的资助, 在此一并致谢.

作者热诚欢迎读者提出宝贵意见.

冯克勤　章　璞　李尚志

2002 年 6 月

符 号 说 明

II.3.2	第 2 章 3.2 小节
定理 II.3.2	第 2 章 3.2 中的定理
定理 3.2	本章 3.2 中的定理
习题 I.3.4	第 1 章 §3 后习题 4
习题 3.4	本章 §3 后习题 4
习题 4	本节后习题 4
:	定义为
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{Z}$	整数环
$\mathbf{Z}_p$	p 阶素域
$\mathbf{Q}$	有理数域
ϕ	空集
$A-B$	集合 B 在集合 A 中的余集
$\subsetneq$	真包含于
$\supsetneq$	真包含
$\mathbf{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathbf{C}^n$	n 维酉空间
S^1	单位圆周
$x \mapsto y$	x 映到 y
$m\|n$	m 能整除 n

$m \nmid n$	m 不能整除 n
$\equiv$	同余
$\cong$	同构
$\oplus$	直和
$\times$	卡氏积 (或直积)
$\otimes_F$	在域 F 上的张量积
$\otimes_A$	在代数 A 上的张量积
δ_{ij}	Kronecker 符号
1_V	V 的恒等变换
1_F	域 F 的单位元
$\mathbf{1}_G$	群 G 的单位表示或单位特征标
$\overline{A}$	集合 A 的闭包
$\|G\|$	有限集 G 中所含元素的个数
$\underline{\mathbf{dim}}M$	模 M 的维数向量
D_n	$2n$ 阶二面体群
S_n	n 次对称群
A_n	n 次交错群
$\mathbf{H}$	四元数代数
$M_n(F)$	域 F 上 n 阶全矩阵环
$GL_n(F)$	域 F 上 n 次一般线性群: F 上 n 阶可逆矩阵的乘法群
$SL_n(F)$	域 F 上 n 次特殊线性群: F 上行列式为 1 的 n 阶矩阵的乘法群
O_n	n 阶正交群 : $\mathbf{R}$ 上 n 阶正交矩阵的乘法群
SO_n	n 阶特殊正交群 : $\mathbf{R}$ 上行列式为 1 的 n 阶正交矩阵的乘法群
U_n	n 阶酉群: $\mathbf{C}$ 上 n 阶酉阵的乘法群

SU_n	n 阶特殊酉群：$\mathbf{C}$ 上行列式为 1 的 n 阶酉阵的乘法群
$GL(V)$	一般线性群
$H \leq G$	H 是 G 的子群
$N \lhd G$ 或 $G \rhd N$	N 是 G 的正规子群
$[G:H]$	子群 H 在 G 中的指数
G'	群 G 的换位子群
$G^{(i)}$	群 G 的第 i 次换位子群
$C_G(H)$	H 在群 G 中的中心化子
$N_G(H)$	H 在群 G 中的正规化子
$C_G(x)$	元素 x 在群 G 中的中心化子
$Z(G)$	群 G 的中心
$Z(A)$	代数 A 的中心
$\mathrm{rad}(A)$	代数 A 的 Jacobson 根
$\mathrm{rad}(M)$	模 M 的 Jacobson 根
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
$N \rtimes H$	正规子群 N 与子群 H 的半直积
${}^gH$	子群 H 的共轭子群 gHg^{-1}
$\mathrm{ann}(M)$	模 M 的零化子
Im	像
Ker	核
tr	迹
ρ_{reg}	正则表示
χ_{reg}	正则表示的特征标
χ_ρ	表示 ρ 的特征标
$\deg\rho$	表示 ρ 的次数
$\deg\chi$	特征标 χ 的次数

$\mathrm{Ker}\rho$	表示 ρ 的核
$\mathrm{Ker}\chi$	特征标 χ 的核
$\mathrm{char}F$	域 F 的特征
$\overline{\mathrm{Irr}_F}G$	群 G 的所有互不等价的不可约 F- 表示的集合
$\mathrm{Irr}_F G$	群 G 的所有互不等价的不可约 F- 表示的特征标的集合
$R_F^+(G)$	群 G 的所有互不等价的 F- 表示的集合
$\mathrm{ch}_F^+(G)$	群 G 的所有互不等价的 F- 表示的特征标的集合
$\mathrm{ch}_F(G)$	群 G 的所有 F- 特征标的整线性组合的集合
$\mathrm{cf}_F(G)$	群 G 上 F- 值类函数的集合
$\mathrm{cf}^F(G)$	群 G 上 F- 值 F- 共轭类的类函数的集合
$C(G,\mathbf{C})$	紧群 G 上连续复值函数的集合
$\mathrm{Hom}_F(M,N)$	F- 空间 M 到 F- 空间 N 的全体 F- 线性映射的集合
$\mathrm{Hom}_G(M,N)$	群 G 的表示 M 到群 G 的表示 N 的全体 G-模映射的集合
$\mathrm{Hom}_A(M,N)$	A- 模 M 到 A- 模 N 的全体模同态的集合
$\mathrm{End}_A(M)$	模 M 的自同态代数
$\mathrm{End}_F(V)$	向量空间 V 的全体 F- 线性变换作成的代数
ρ^G 或 ρ_H^G	子群 H 的表示 ρ 的诱导表示
W^G 或 W_H^G	子群 H 的表示 W 的诱导表示
V^K	群 G 的 F- 表示 V 通过基域 F 的扩张得到的 G 的 K- 表示
ρ^K	群 G 的 F- 表示 ρ 通过基域 F 的扩张得到的 G 的 K- 表示

$\rho\#\varphi$	群 G_1 的表示 ρ 与群 G_2 的表示 φ 的外张量积
${}^g\rho$	群 G 的表示 ρ 的共轭表示：${}^g\rho(h)=\rho(g^{-1}hg),\ \forall h\in G$
ρ_H	群 G 的表示 ρ 在子群 H 上的限制表示
χ_H	群 G 的特征标 χ 在子群 H 上的限制
ρ^*	表示 ρ 的反轭表示
χ^*	特征标 χ 的反轭特征标
V^*	向量空间 V 的对偶空间
nV	n 个表示 (或向量空间)V 的直和
$n\rho$	n 个表示 ρ 的直和
G_ρ	表示 ρ 的惯性群：$G_\rho=\{g\in G\mid {}^g\rho\cong\rho\}$
$\mathrm{Gal}(E\|F)$	域 E 在子域 F 上的 Galois 群
$\Phi_n(t)$	n 次分圆多项式

目 录

第 1 章　群表示的基本概念

本章介绍群表示的基本概念，包括群表示的定义与例子，常用的构造方法，不可约表示与完全可约表示，Maschke 定理，正则表示的不可约分解，最后举例确定群的不可约表示.

我们强调有限群的表示是向量空间 V 上 $|G|$ 个可逆线性变换的理论，这 $|G|$ 个可逆线性变换是以“群 G 的方式”同时作用在 V 上的. 因此，从某种意义上讲，有限群的表示理论可视为线性代数“非平凡”的推广.

§1　定义和例子

1.1　定义　设 G 是任一群，V 是域 F 上的向量空间. 如果存在群同态 $\rho: G \to GL(V)$，其中 $GL(V)$ 是一般线性群，即 V 上全体可逆线性变换作成的乘法群，则称 (V, ρ) 是 G 的一个 F- 线性表示，简称为 F- 表示 V，或 F- 表示 ρ. 若 V 是有限维的，将 $\dim_F V$ 称为该表示的维数或次数，记为 $\deg \rho$；将 V 称为表示空间.

令 $\mathrm{Ker}\rho := \{\ g \in G \mid \rho(g) = 1_V\ \}$，称为表示 ρ 的核. 若 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$，则称 ρ 是忠实的表示.

因此，群 G 的 F- 表示 (V, ρ) 有两个要素，一为表示空间 V，二为群同态 ρ. 要断言 (V, ρ) 是 G 的一个 F- 表示，必须而且只要验证如下两条：

(i) ρ 是 G 到 $GL(V)$ 的映射，即 $\forall\, g \in G$，$\rho(g)$ 是 V 的可逆线性变换；

(ii) $\forall\, g_1,\ g_2 \in G$，均有 $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$.

有时候，利用如下条件验证似乎更方便，即 (V, ρ) 是 G 的一个 F- 表示当且仅当上述条件 (ii) 和下述条件 (iii) 被满足：

(iii) ρ 是 G 到 $\mathrm{End}_F(V)$ 的映射且 $\rho(1) = \mathbf{1}_V$，其中 $\mathrm{End}_F(V)$ 是 V 的全体线性变换作成的环.

1.2 群表示的实质是群在向量空间上的线性作用，因此有时用下述观点更自然.

定义 设 G 是任一群，V 是域 F 上的向量空间. 如果存在 G 在 V 上的 F- 线性作用，即存在映射 $G \times V \to V$: $(g, v) \mapsto gv \in V$，$\forall (g, v) \in G \times V$，满足

(i) $g(u + v) = gu + gv$，$\forall\, g \in G$，$u,\ v \in V$；

(ii) $g(av) = a(gv)$，$\forall\, g \in G$，$a \in F$，$v \in V$；

(iii) $\mathbf{1}v = v$，$\forall\, v \in V$；

(iv) $(g_1 \cdot g_2)v = g_1(g_2 v)$，$\forall\, g_1,\ g_2 \in G$，$v \in V$，

则称 V 是 G 的一个 F- 表示.

如同抽象代数中群在集合上的作用，上述定义中 (iii), (iv) 两条是说 G 在集合 V 上有一个作用；而 (i),(ii) 两条则是说这种作用是 F- 线性的，从而与 V 的 F- 向量空间结构是吻合的.

群表示的上述两种定义是等价的：若有 G 的 F- 表示 (V, ρ)，则

$$gv := \rho(g)(v),\ \forall g \in G, v \in V,$$

给出了 G 在 V 上的 F- 线性作用； 若有 G 在 V 上的 F- 线性作用，则 $g \mapsto \rho(g)$，$\forall g \in G$，给出了 G 的 F- 表示 (V, ρ)，其中

$\rho(g)(v) := gv,\ \forall v \in V$.

今后，若无特别声明，我们**只研究群的有限维表示**.

1.3　例 1(单位表示)　令 $V = F$. $\forall\, g \in G$, $a \in F$, 令 $ga = a$. 则称 V 是 G 的单位 F- 表示或主表示，其次数是 1. 此时 $GL(V) \cong F^*$, 即 F 的全体非零元作成的乘法群，而相应的群同态 $\rho: G \to GL(V) \cong F^*$ 是单位同态 $\mathbf{1}$. 单位表示记为 $\mathbf{1}_G = (F, 1)$, 其核为 G.

例 2　令 $G = D_4 = \langle\, a, b \mid a^4 = b^2 = 1, ab = ba^{-1}\,\rangle = \langle\, a, b \mid a^4 = b^2 = 1, (ab)^2 = 1\,\rangle$. 熟知 D_4 是正方形的对称群 (即平面上的将正方形中的点仍变成正方形中的点的正交变换). 考虑 D_4 的如下 2 维复表示:

令 $V = \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}e_1 \oplus \mathbf{C}e_2$, $\rho: G \to GL(V)$, 其中

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(a^m b^n) = (\rho(a))^m \cdot (\rho(b))^n,\quad 0 \le m \le 3,\ n = 0, 1.$$

欲证 (V, ρ) 是 G 的 $\mathbf{C}$- 表示，只要验证 1.1 中条件 (ii) 在 G 的定义关系上得到满足即可. 事实上，我们有

$$(\rho(a))^4 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\rho(b))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\rho(ab))^2 = (\rho(a) \cdot \rho(b))^2 = \left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3 (矩阵表示与表示的矩阵) 用 $GL_n(F)$ 记全体 n 阶可逆矩阵作成的乘法群. 群同态 $\rho: G \longrightarrow GL_n(F)$ 称为 G 的一个 n 次 F- 矩阵表示.

G 的矩阵表示与 G 的有限维线性表示是一回事. 设有 G 的一个 n 次 F- 矩阵表示 ρ. 令 $V = F^n$. 则对于作用 $gv := \rho(g)v$, $\forall g \in G$, $v \in V$, V 是 G 的一个 n 次 F- 线性表示. 反之, 设 (V,ρ) 是 G 的一个 n 次 F- 线性表示. 选定 V 的一组 F- 基 $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$. 则得到 G 的 F- 矩阵表示 ρ_B, 其中 $\rho_B(g)$ 是 $\rho(g)$ 在基 B 下的矩阵, $\forall g \in G$.

给定有限群 G 的一个 n 维表示 (V,ρ), 等同于给定 $|G|$ 个 n 阶可逆矩阵 $\rho_B(g), g \in G$, 使得

$$\rho_B(g_1 \cdot g_2) = \rho_B(g_1) \cdot \rho_B(g_2), \quad \forall g_1,\ g_2 \in G.$$

若另选 V 的一组基 C, 则 (V,ρ) 可表达成矩阵表示 (V,ρ_C) 的形式. 对于任一 $g \in G$, $\rho_C(g)$ 与 $\rho_B(g)$ 是同一可逆线性变换 $\rho(g)$ 在不同基下的矩阵, 因此 $\rho_C(g) = T^{-1}\rho_B(g)T$, $\forall g \in G$, 其中 T 是基 B 到基 C 的过渡矩阵. 由此可见, 虽然矩阵表示 (V,ρ_B) 与 (V,ρ_C) 的形式不同, 但实质上是一回事. 描述这种形式上不同但实质上相同的表示就是表示等价的概念, 我们将在下一节中讨论.

因此, 如果认为线性代数是向量空间中一个线性变换的理论, 则有限群 G 的表示就是 $|G|$ 个可逆线性变换以 " G 的方式" 同时作用在向量空间上的理论.

例 4 (正则表示) 令 $V = FG$, 即 V 是以 G 中元素为基元作成的 F- 向量空间. 令 G 在 V 上的 F- 线性作用是由 G 中的乘法诱导的, 即 $\forall g \in G$, $x = \sum\limits_{h\in G} x_h \cdot h \in V$, 其中 $x_h \in F$, 定义

$$gx = \sum_{h\in G} x_h(g \cdot h).$$

则易证 1.2 中四条性质均满足，从而 V 是 G 的 $|G|$ 维 F- 表示，记为 $(FG, \rho_{\rm reg})$，称为 G 的 F- 正则表示 (读者可自行写出用定义 1.1 叙述的形式). 它显然是忠实的表示. (若 G 是无限群，则正则表示是无限维的.) 注意到正则表示有如下特点：$\rho_{\rm reg}(g)$ 将表示空间的一组基 G 仍变成这组基，$\forall g \in G$; 也就是说，群作用引起 G 中元的置换，从而正则表示在基 G 下的矩阵均是置换矩阵.

更一般地，我们有

例 5 (置换表示)　设 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是有限 G- 集，即 G 在 S 上有一作用 (或等价地，给定了 G 到 n 次对称群 S_n 的一个群同态). 令 $V = FS$，即 V 是以 S 中元素为基元的 F- 向量空间. 令 $\rho: G \to GL(V)$ 为如下群同态：$\forall g \in G$，$\rho(g)$ 是将任一基元 $i \in S$ 送到基元 gi 的可逆线性变换. 这样得到的表示称为由 G- 集 S 诱导的置换表示. 因此在基 S 下，任一线性变换 $\rho(g)$ 的矩阵均是置换矩阵.

特别地，若 $H \le G$，则 G 关于 H 的左陪集的集合 G/H 对于作用 $g(xH) := (gx)H$, $\forall g, x \in G$，是一个 G- 集，从而得到相应的 G 的置换表示.

例 6　设 $G = \langle g \rangle$ 是 n 阶循环群. 考虑 G 的 F- 正则表示 $\rho_{\rm reg}$. 则 $\rho_{\rm reg}(g)$ 是将 g^i 变到 $g^{i+1}, 1 \le i \le n$, 的线性变换，因此 $\rho(g)$ 在基 $G = \{1, g, \cdots, g^{n-1}\}$ 下的矩阵为置换阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $\rho_{\rm reg}(g^i)$ 在 G 下的矩阵为 A^i, $0 \le i \le n-1$.

例 7 设 $G=S_3$. 考虑由恒等映射 $G\to S_3$ 诱导出的置换表示 ρ. 令 $S=\{1,2,3\}$, $V=FS=F^3$. 则 $\rho:\ G\to GL(V)$ 是下述群同态:

$$(1)\longmapsto \rho_S((1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(12)\longmapsto \rho_S((12))=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(13)\longmapsto \rho_S((13))=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$(23)\longmapsto \rho_S((23))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$(123)\longmapsto \rho_S((123))=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$(132)\longmapsto \rho_S((132))=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

习 题

1. 详细验证定义 1.1 与定义 1.2 的等价性.
2. 设 $K=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$, $G=S_4$. 则 G/K

$\cong S_3$. 写出由典范同态 $\pi:\ G \longrightarrow S_3$ 诱导出的置换表示 ρ 的矩阵.

3. 写出 S_3 的正则表示的矩阵表达.

4. 设 H 是 G 的子群, 则 G 关于 H 的左陪集的集合 G/H 作成 G- 集. 求由此 G- 集诱导的置换表示的核.

5. 证明指数函数 $x \longmapsto e^{xa}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, 其中 $\mathbf{R}$ 为实数域, a 是一固定的实数, 是加法群 $\mathbf{R}$ 的一次实表示; 进一步地, 若连续函数 f 是加法群 $\mathbf{R}$ 的 1 次实表示, 则 f 必定是指数函数.

§2 子表示、商表示、表示的同态

与群的结构理论相似, 研究子表示与商表示是研究表示的一条重要途径.

2.1 定义 (i) 设 $(V,\ \rho)$ 是群 G 的 F- 表示. 若 U 是 V 的 F- 子空间, 且 $\rho(g)\cdot U \subseteq U$, $\forall g \in G$, 即 U 是 V 的 G- 不变子空间, 则称 $(U,\ \rho|_U)$ 是 $(U,\ \rho)$ 的子表示.

因此, 说 " U 是 V 的子表示", 等于说 " U 是 V 的子空间且对于 G 的作用是封闭的".

(ii) 设 $(U,\ \rho|_U)$ 是 (V, ρ) 的子表示. 考虑商空间 V/U. 对于 $g \in G$, $x + U \in V/U$, 定义 $g(x+U) := gx + U$. 则 V/U 对于这一作用作成 G 的表示, 称为 (V,ρ) 的商表示, 记为 $(V/U,\ \rho_{V/U})$.

设 $(U,\ \rho|_U)$ 是 $(V,\ \rho)$ 的子表示, 选定 V 的一组基 $B = (u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$, 使得 $C = (u_1, \cdots, u_r)$ 是 U 的一组基. 则

$$\rho_B(g) = \begin{pmatrix} (\rho|_U)_C(g) & * \\ 0 & (\rho_{V/U})_{\overline{B}}(g) \end{pmatrix},\quad \forall\, g \in G,$$

其中 $\overline{B} = \{ u_{r+1} + U, \cdots, u_n + U \}$.

2.2 **例 1** 考虑 G 的 F- 正则表示 (FG, ρ_{reg}). 令 $U = Fz$, 其中 $z = \sum\limits_{g \in G} g$. 则易证 U 是 G 的正则表示的子表示.

例 2 令 $V = FG$. 定义 G 的作用如下: $\forall g \in G$, $x = \sum\limits_{h \in G} x_h h \in V$, $gx := \sum\limits_{h \in G} x_h ghg^{-1}$. 则 V 是 G 的 F- 表示. 设 $N \lhd G$, $U = FN$. 则 U 是 V 的子表示.

2.3 研究不同表示之间的联系是表示论的一个基本任务, 而反映这种联系的基本概念是表示的同态.

定义 设 $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ 是群 G 的两个 F- 表示. 如果 F- 线性映射 $f: V_1 \to V_2$ 使得对于任一 $g \in G$ 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \rho_1(g) \downarrow & & \downarrow \rho_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}$$

即 $f(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(f(v))$, 或简记成 $f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$, $\forall\, v \in V_1$, 则称 f 是 V_1 到 V_2 的表示同态, 或称为 G- 模映射. 若 f 是 V_1 到 V_2 的 G- 模映射并且 f 是双射 (既单又满), 则称 f 是 G- 模同构. 此时称 (V_1, ρ_1) 与 (V_2, ρ_2) 是等价的表示, 或同构的表示, 记为 $V_1 \cong V_2$, 或 $\rho_1 \cong \rho_2$.

用矩阵的语言说, 表示 V_1 与 V_2 等价当且仅当存在 V_i 的一组基 $B_i, i = 1, 2$, 使得 ${\rho_1}_{B_1}(g)$ 同时相似于 ${\rho_2}_{B_2}(g)$, $\forall\, g \in G$, 即存在同一个可逆阵 T 使得

$${\rho_1}_{B_1}(g) = T^{-1} {\rho_2}_{B_2}(g) T, \ \forall\, g \in G.$$

设 (V_1, ρ_1) 与 (V_2, ρ_2) 是等价的 F- 表示, f 是相应的 G- 模同构. 则对于 V_1 的任一基 B_1 和 V_2 的基 $f(B_1)$, $\rho_1(g)$ 在 B_1 下

的矩阵和 $\rho_2(g)$ 在基 $f(B_1)$ 下的矩阵相等，$\forall g \in G$. 因此，等价的表示当然被视为同一表示.

2.4　引理　设 $f:(V_1,\rho_1)\to(V_2,\rho_2)$ 是 G- 模映射，令

$$\mathrm{Ker}f=\{v\in V_1 \mid f(v)=0\},$$
$$\mathrm{Im}f=\{f(v)\in V_2 \mid v\in V_1\}.$$

则有

(i) $\mathrm{Ker}f$ 是 (V_1,ρ_1) 的子表示.

(ii) $\mathrm{Im}f$ 是 (V_2,ρ_2) 的子表示.

(iii) f 单 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}f=(0)$.

(iv) f 满 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}f=V_2$.

(v) $\dim_F(\mathrm{Ker}f)+\dim_F(\mathrm{Im}f)=\dim_F V_1$.

(vi) $\mathrm{Im}f\cong V_1/\mathrm{Ker}f$ (G- 模同构).

(vii) 设 $g:(V_1,\rho_1)\to(V_3,\rho_3)$ 是 G- 模映射且 $\mathrm{Ker}f\subseteq\mathrm{Ker}g$, 则存在 G- 模映射 $h:\mathrm{Im}f\to(V_3,\rho_3)$ 使得 $g=hf$.

证明留作习题.

2.5　设 V_1,V_2 均是群 G 的 F- 表示. 用 $\mathrm{Hom}_F(V_1,V_2)$ 记 V_1 到 V_2 的全体 F- 线性映射作成的 F- 向量空间，用 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ 表示 V_1 到 V_2 的全体 G- 模映射作成的集合. 则 $\mathrm{Hom}_F(V_1,V_2)$ 和 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ 对于映射的加法和合成均有环的结构. 对于任一 $f\in\mathrm{Hom}_F(V_1,V_2)$ 和任一 $g\in G$, 定义 $gf:V_1\to V_2$ 为如下 F- 线性映射:

$$(gf)(v)=g(f(g^{-1}v)),\quad \forall\, v\in V_1.$$

则有

引理　$\mathrm{Hom}_F(V_1,V_2)$ 对于上述作用是 G 的维数为 $\dim_F V_1\cdot\dim_F V_2$ 的 F- 表示，且 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ 是其子表示.

(请读者考虑为什么选择上述的作用，而不选择下述诸种定义?

(i) $(gf)(v) = g(f(v))$;

(ii) $(gf)(v) = f(gv)$;

(iii) $(gf)(v) = g^{-1}f(v)$;

(iv) $(gf)(v) = f(g^{-1}v)$.)

2.6 例 设 $V = \mathbf{C}e_1 \oplus \mathbf{C}e_2$, $G = D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$.

令 ρ_1 为如下作用:

$$ae_1 = \mathrm{i}e_1, \quad ae_2 = -\mathrm{i}e_2, \quad be_1 = e_2, \quad be_2 = e_1;$$

令 ρ_2 为如下作用:

$$ae_1 = e_2, \quad ae_2 = -e_1, \quad be_1 = e_2, \quad be_2 = e_1.$$

则易验证 (V, ρ_1) 和 (V, ρ_2) 均是 G 的表示，并且 $(V, \rho_1) \cong (V, \rho_2)$. 为此，令 $f(e_1) = e_1 - \mathrm{i}e_2, f(e_2) = -\mathrm{i}e_1 + e_2$. 则可验证 f 是 (V, ρ_1) 到 (V, ρ_2) 的 G- 模同构.

习　　题

1. 证明引理 2.4.

2. 给出引理 2.5 证明的细节.

3. 设 (F, ρ_1) 和 (F, ρ_2) 是 G 的两个 1 维表示. 证明 $\rho_1 \cong \rho_2$ 当且仅当 $\rho_1 = \rho_2$.

4. 证明例 2.6 中给出的映射 f 的确是 G- 模同构.

5. 设 V 是 G 的任一 F- 表示，则有 F- 向量空间的同构

$$\mathrm{Hom}_G(FG, V) \cong V,$$

其中 FG 是 G 的正则表示. [提示: 考虑 $f \mapsto f(1)$.]

§3 表示的常用构造法

构造表示是表示论的基本任务之一. 本节介绍一些最常见的群表示构造法.

3.1 表示的直和

设 (V_i, ρ_i), $i = 1, \cdots, n$, 均是群 G 的 F- 表示. 令 V 是向量空间 V_i, $i = 1, \cdots, n$, 的直和, 即 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. 对于任一 $g \in G$, $(v_1, \cdots, v_n) \in V$, 其中 $v_i \in V_i$, $i = 1, \cdots, n$, 定义

$$g(v_1, \cdots, v_n) = (gv_1, \cdots, gv_n) = (\rho_1(g)v_1, \cdots, \rho_n(g)v_n).$$

则 V 成为 G 的一个 F- 表示, 称为是表示 $(V_i, \rho_i), i = 1, \cdots, n$, 的直和, 记为 $V = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,\ \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n)$.

从表示的矩阵看, 如果 B_i 是 V_i 的一组基, $i = 1, \cdots, n$, 则 $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ 是 V 的一组基, 且

$$(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n)_B(g) = \begin{pmatrix} \rho_{1,B_1}(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_{n,B_n}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G.$$

由定义易知, 若 $(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n)(g) = 1_V$, 则 $\rho_i(g) = 1_{V_i}$, $1 \le i \le n$.

容易证明如下引理:

引理 A 设 V, V_i, $i = 1, \cdots, n$, 均是 G 的 F- 表示. 则 V 是表示 V_i, $i = 1, \cdots, n$, 的直和当且仅当 V 有子表示 $V_i' \cong V_i$, $i = 1, \cdots, n$, 满足如下条件:

(i) $V = V_1' + \cdots + V_n'$;

(ii) $V_i' \cap (V_{i+1}' + \cdots + V_n') = \{0\}$, $1 \le i \le n-1$.

注意到 V 的子表示未必是 V 的直和项. 那么 V 的子表示 U 何时是 V 的直和项, 即何时存在 V 的子表示 W 使得 $V = U \oplus W$ 呢 (这样的 W 称为 U 的补表示, 它在同构意义下是唯一的)?

引理 B 设 U 是表示 V 的子表示. 则 U 有补表示当且仅当存在 V 到 U 的 G- 模投射, 即存在 G- 模映射 $p: V \to U$ 使得 $p|_U = 1_U$.

证 设 U 有补表示 W, 即 $V = U \oplus W$. 令 $p: V \to U$ 是 V 到 U 的投影, 即 $p((u,w)) = u$, $\forall (u,w) \in U \oplus W$. 则易知 p 是 V 到 U 的 G- 模映射. 反之, 设存在 G- 模映射 $p: V \to U$ 使得 $p|_U = 1_U$. 令 $W = \mathrm{Ker}p$, 则 W 是 V 的子表示. 对于任一 $v \in V$, 我们有 $v = p(v) + (v - p(v))$. 由于 p 在 U 上的限制是恒等映射, 故 $v - p(v) \in W$, 从而 $v \in U + W$. 再设 $x \in U \cap W$, 则 $x = p(x) = 0$, 故 $V = U \oplus W$. □

例 设 U, V 是 G 的 F- 表示. 由 2.5 的构造易知 $\mathrm{Hom}_G(U,V)$ 同构于 d 个单位表示的直和, 其中 $d = \dim_F \mathrm{Hom}_G(U,V)$.

3.2 反轭 (contragredient) 表示

设 (V,ρ) 是群 G 的 F- 表示. 令 $V^* = \mathrm{Hom}_F(V,F)$, 即 V^* 是 V 上全体 F- 线性函数作成的 F- 向量空间. 考虑映射 $\rho^*: G \to GL(V^*)$, 其中 $\rho^*(g)$, $\forall\, g \in G$, 是如下定义的 V^* 的线性变换:

$$\rho^*(g)(f)(v) = f(g^{-1} \cdot v), \quad \forall f \in V^*,\ v \in V.$$

为了看出 $\rho^*(g)$ 的确是 V^* 的可逆线性变换, 只要注意到以下事实: 设 $B = (v_1, \cdots, v_n)$ 是 V 的一组基, $B^* = (v_1^*, \cdots, v_n^*)$ 是 V^* 的相应的对偶基, 即 $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i,j \le n$. 则有 (留作习题)

(i) $\rho^*_{B^*}(g) = ((\rho_B(g))^{\mathrm{T}})^{-1}$, 即 $\rho^*_{B^*}(g)$ 恰是 $\rho_B(g)$ 的转置逆.

根据这一点易推出

(ii) $\rho^*_{B^*}(g_1g_2) = \rho^*_{B^*}(g_1)\cdot\rho^*_{B^*}(g_2)$, $\forall\, g_1, g_2 \in G$.

由此可见 (V^*, ρ^*) 亦是 G 的 F- 表示，称为是 (V, ρ) 的反轭表示.

3.3　表示的张量积

3.3.1　向量空间的张量积

设 M, N 是 F- 向量空间， $M\times N$ 是 M 与 N 的卡氏积， V 是 F- 向量空间. 映射 $f: M\times N\to V$ 称为 F- 双线性映射，如果

(i) $f((\lambda m, n)) = f((m, \lambda n)) = \lambda f((m, n))$, $\forall\lambda\in F$, $m\in M$, $n\in N$;

(ii) $f((m_1+m_2, n)) = f((m_1, n)) + f((m_2, n))$, $\forall m_1, m_2\in M$, $n\in N$;

(iii) $f((m, n_1+n_2)) = f((m, n_1))+f((m, n_2))$, $\forall m\in M$, $n_1, n_2 \in N$.

定义　F- 向量空间 W 称为 M 与 N 在域 F 上的张量积，如果存在具有泛性质的 F- 双线性映射 $\eta: M\times N\to W$. 这就是说，对于任一 F- 双线性映射 $f: M\times N\to V$, 均存在唯一的 F- 线性映射 $\tilde{f}: W\to V$ 满足 $f=\tilde{f}\eta$.

根据定义易推出张量积的唯一性. 事实上，若 F- 双射映射 $\eta: M\times N\to W$ 与 $\eta': M\times N\to W'$ 均具有泛性质，则存在唯一的 F- 线性映射 $\widetilde{\eta'}: W\to W'$ 满足 $\eta' = \widetilde{\eta'}\eta$; 同理，存在唯一的 F- 线性映射 $\tilde{\eta}: W'\to W$ 满足 $\eta = \tilde{\eta}\eta'$. 于是 $\eta = \tilde{\eta}\widetilde{\eta'}\eta$, 而由定义中的唯一性知 $\tilde{\eta}\widetilde{\eta'} = 1_W$; 同理， $\widetilde{\eta'}\tilde{\eta} = 1_{W'}$, 即 W 与 W' 是同构的 F- 向量空间.

为了看出张量积的存在性，令 $\{m_i \mid i \in B\}$ 和 $\{n_j \mid j \in C\}$ 分别是 M 和 N 的一组基. 以集合 $\{m_i \otimes_F n_j \mid i \in B, j \in C\}$ 为基作成的 F- 向量空间 W 即是 M 与 N 的张量积，记为 $M \otimes_F N$，或简记成 $M \otimes N$. (注意: 此处 $m_i \otimes_F n_j$ 仅是一个符号而已，并且若 $i \neq i'$，或 $j \neq j'$，则 $m_i \otimes_F n_j$ 与 $m_{i'} \otimes n_{j'}$ 看成是不同的符号.) 事实上，考虑映射 $\otimes_F: M \times N \to M \otimes_F N$，它将 $M \times N$ 中任一元 (m,n)，其中 $m = \sum_{i \in B} \lambda_i m_i$，$n = \sum_{j \in C} \mu_j n_j$，$\lambda_i, \mu_j \in F$，映到

$$\otimes_F((m,n)) = m \otimes_F n := \sum_{i \in B, j \in C} \lambda_i \mu_j (m_i \otimes_F n_j).$$

根据定义，$\otimes_F$ 显然是 F- 双线性映射，即有

$$(\lambda m) \otimes_F n = m \otimes_F (\lambda n) = \lambda(m \otimes_F n), \quad \forall \lambda \in F, m \in M, n \in N;$$
$$(m_1 + m_2) \otimes_F n = m_1 \otimes_F n + m_2 \otimes_F n, \quad \forall m_1, m_2 \in M, n \in N;$$
$$m \otimes_F (n_1 + n_2) = m \otimes_F n_1 + m \otimes_F n_2, \quad \forall m \in M, n_1, n_2 \in N.$$

进一步地，也容易看出 $\otimes_F$ 具有泛性质 (留作习题). 从而 $M \otimes_F N$ 就是 M 与 N 在 F 上的张量积. 这个构造虽然从固定的基出发，但由张量积的唯一性知它不依赖于基的选择.

要注意的是，$M \otimes_F N$ 中任一元均可写成有限和 $\sum m \otimes_F n$ 的形式，但未必能写成 $m \otimes_F n$ 的形式，而且这种写法也不是唯一的，例如:

$$(2m) \otimes_F n - m \otimes_F (2n) = 0 = 0 \otimes_F 0.$$

尽管如此，若 $m \otimes_F n = 0$，则必可推出 $m = 0$ 或 $n = 0$.(事实上，若 $m \neq 0, n \neq 0$，则可将 m 扩充成 M 的一组基 B，n 扩充成 N 的一组基 C，从而由 $M \otimes_F N$ 的构造即知 $m \otimes_F n$ 能扩充成 $M \otimes_F N$ 的一组基.)

以后我们将 $m\otimes_F n$ 简记成 $m\otimes n$. 关于张量积的性质, 此处不作进一步的展开, 留在 III.8 再作系统的讨论.

3.3.2　线性变换 (或矩阵) 的张量积

设 M、N 是 F- 向量空间, $f\in \mathrm{End}_F M$、$g\in \mathrm{End}_F N$, 且 f 在基 $\{m_1,\cdots,m_r\}$ 下的矩阵是 $A=(a_{ij})_{r\times r}$、g 在基 $\{n_1,\cdots,n_s\}$ 下的矩阵是 $B=(b_{ij})_{s\times s}$. 定义 F- 线性变换 $f\otimes g\in \mathrm{End}_F(M\otimes N)$ 如下:

$$(f\otimes g)(m_i\otimes n_j)=f(m_i)\otimes g(n_j),\quad \forall 1\leq i\leq r,\ 1\leq j\leq s.$$

因为

$$\begin{aligned}(f\otimes g)(m_i\otimes n_j)&=f(m_i)\otimes g(n_j)\\&=\left(\sum_{k=1}^{r}a_{ki}m_k\right)\otimes\left(\sum_{t=1}^{s}b_{tj}n_t\right)\\&=\sum_{k=1}^{r}\sum_{t=1}^{s}a_{ki}b_{tj}(m_k\otimes n_t),\end{aligned}$$

故 $f\otimes g$ 在基 $m_1\otimes n_1,\cdots,m_1\otimes n_s,\cdots,m_r\otimes n_1,\cdots,m_r\otimes n_s$ 下的矩阵是

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & \cdots & a_{1r}B\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1}B & \cdots & a_{rr}B\end{pmatrix}.$$

将 $A\otimes B$ 称为矩阵的张量积或 Kronecker 积.

例如, 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$. 则

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

若 f, g 均是可逆线性变换，则由定义可知 $f \otimes g$ 仍是可逆线性变换 (请读者自行证明这一点). 因此，两个可逆阵的张量积仍是一个可逆阵.

若 f_1, f_2 是 M 的线性变换， g_1, g_2 是 N 的线性变换，则

$$(f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2) = (f_1 \cdot f_2) \otimes (g_1 \cdot g_2) \in \mathrm{End}_F(M \otimes N). \quad (*)$$

3.3.3 表示的张量积

设 $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ 是群 G 的两个表示. 令 $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$ 是如下映射: $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g), \forall\, g \in G$. 利用 (*) 式知 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 是群同态:

$$\begin{aligned}(\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1 \cdot g_2) &= \rho_1(g_1 \cdot g_2) \otimes \rho_2(g_1 \cdot g_2) \\ &= (\rho_1(g_1) \cdot \rho_1(g_2)) \otimes (\rho_2(g_1) \cdot \rho_2(g_2)) \\ &= (\rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_1)) \cdot (\rho_1(g_2) \otimes \rho_2(g_2)) \\ &= (\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1) \cdot (\rho_1 \otimes \rho_2)(g_2).\end{aligned}$$

从而 $(V_1 \otimes V_2,\ \rho_1 \otimes \rho_2)$ 是 G 的表示，称为表示 V_1 与表示 V_2 的张量积.

引理 设 V, W 均是 G 的表示. 则有 G- 模同构 $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_F(V, W)$.

证　令

$$\varphi:\ V^*\otimes W\longrightarrow \mathrm{Hom}_F(V,W)$$

$$f\otimes w\longmapsto (v\longmapsto f(v)\cdot w),\ \forall\ f\in V^*,\ w\in W,\ v\in V.$$

欲证 φ 是 G- 模同构. 由于 $V^*\otimes W$ 与 $\mathrm{Hom}_F(V,W)$ 均是 $\dim_F V\cdot\dim_F W$ 维表示, 因此只要证明 φ 是 G- 模单射即可. 而 φ 单由定义直接可看出, 我们把验证 φ 是 G- 模映射留给读者. □

前面谈的都是构造同一个群的表示. 下面我们研究如何从一个群的表示去构造与其相关的另一个群的表示.

3.4　表示的提升

给定群同态 $\pi: G_1\longrightarrow G_2$ 和 G_2 的表示 $\eta: G_2\longrightarrow GL(V)$, 由此得到 G_1 的表示 $\rho=\eta\cdot\pi: G_1\to GL(V)$, 将此表示称为 η 通过 π 的提升.

例如, 设 (V,ρ) 是 G 的表示, H 是 G 的子群. 则 V 自然也是 H 的表示, 称为 ρ 在 H 上的限制表示, 记为 $(V,\ \rho_H)$. 它可看成是 ρ 通过嵌入 $i: H\to G$ 的提升. 反之, 从 H 的表示怎样得到 G 的表示是第 4 章要讨论的问题.

又例如, 设 $N\lhd G$, $(V,\ \rho)$ 是 N 的表示, $g\in G$. 则 ρ 可通过群同态 $\sigma_g: N\to N$, 其中 $\sigma_g(n)=g^{-1}ng$, $\forall n\in N$, 提升为 N 的另一表示, 记为 $(V,\ {}^g\rho)$, 称为 ρ 的共轭表示. 特别地, 可取 $N=G$.

容易验证如下引理:

引理　设 $N\lhd G$. 则自然同态 $\pi: G\to G/N$ 诱导出如下双射:

$$\{G/N\text{的表示}\}\ \xrightarrow{\ \psi\ }\ \{G\text{的表示}\ \rho\ \text{且}\ \mathrm{Ker}\rho\supseteq N\},$$

其中 G/N 的任一表示 (V,ρ) 在 ψ 下的像定义为 ρ 通过 π 的提升 $(V,\ \rho\cdot\pi)$.

3.5 直积的表示：表示的外张量积

设群 G 是群 G_1 和 G_2 的直积，(V_i,ρ_i) 是 G_i 的表示，$i=1,2$. 令

$$\rho_1 \# \rho_2:\ G = G_1\times G_2 \longrightarrow GL(V_1\otimes V_2)$$

是如下映射：

$$(\rho_1 \# \rho_2)(g) = \rho_1(g_1)\otimes\rho_2(g_2),\quad \forall g=(g_1,g_2)\in G_1\times G_2.$$

则易知 $\rho_1 \# \rho_2$ 是群同态，由此得到的 $G=G_1\times G_2$ 的表示记为 $(V_1\otimes V_2,\rho_1 \# \rho_2)$，称为 ρ_1 与 ρ_2 的外张量积.

类似地，可以定义 $G_1\times\cdots\times G_m$ 的表示 $(V_1\otimes\cdots\otimes V_m,\ \rho_1 \# \cdots \# \rho_m)$.

设 F 是特征零的代数闭域，G_i 均为有限群. 在下一章中我们将证明 $G_1\times\cdots\times G_m$ 的任一 F- 表示均是形如 $(V_1\otimes\cdots\otimes V_m,\ \rho_1 \# \cdots \# \rho_m)$ 的表示的直和. 因此，群的直积的 F- 表示可归结为每个因子群的 F- 表示.

习　题

1. 设 $G=S_3$，写出由 $G\to S_2\cong G/A_3$ 诱导的置换表示与 $G\xrightarrow{\text{id}} S_3$ 诱导的置换表示的张量积的矩阵.

2. 证明 3.2(i)，即 $\rho^*_{B^*}(g)$ 是 $\rho_B(g)$ 的转置逆. [提示：利用 $\rho^*_{B^*}(g)(v_i^*)(gv_j)=\delta_{ij}$.]

3. 给出引理 3.3 和引理 3.4 的证明细节.

4. 设 V_1, V_2, V_3 均是 G 的 F- 表示. 则有 F- 向量空间的同构:

$$\mathrm{Hom}_G(V_1 \oplus V_2, V_3) \cong \mathrm{Hom}_G(V_1, V_3) \oplus \mathrm{Hom}_G(V_2, V_3);$$

$$\mathrm{Hom}_G(V_3, V_1 \oplus V_2) \cong \mathrm{Hom}_G(V_3, V_1) \oplus \mathrm{Hom}_G(V_3, V_2).$$

[提示: 令 $p_j : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_j$ 是投影映射, $j = 1, 2$. 令 $i_j : V_j \longrightarrow V_1 \oplus V_2$ 是嵌入映射, $j = 1, 2$. 则

$$p_1 i_1 = 1_{V_1},\ p_2 i_2 = 1_{V_2},\ p_1 i_2 = 0 = p_2 i_1,$$

$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_{V_1 \oplus V_2}.$$

验证 $f \mapsto (fi_1, fi_2)$ 是 $\mathrm{Hom}_G(V_1 \oplus V_2, V_3)$ 到 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_3) \oplus \mathrm{Hom}_G(V_2, V_3)$ 的 F- 线性映射, 其逆映射为 $(f_1, f_2) \mapsto f_1 p_1 + f_2 p_2$.]

5. 验证张量映射 $\otimes_F$ 的泛性质. [提示: 利用 $M \otimes N$ 的基构造.]

6. 设 ρ_1, ρ_2 是 G 的两个表示. 证明 $\rho_1 \otimes \rho_2 \cong \rho_2 \otimes \rho_1$.

7. 设 $m_1, \cdots, m_s$ 是 M 的一组 F- 基, $n_1, \cdots, n_t$ 是 N 的一组 F- 基. 则 $M \otimes_F N$ 中任一元均可唯一地写成形如

$$\sum_{1 \le i \le s} m_i \otimes y_i,\quad y_i \in N;$$

也可唯一地写成形如

$$\sum_{1 \le i \le t} x_i \otimes n_i,\quad x_i \in M.$$

8. 设 f, g 分别是 M 和 N 的可逆线性变换. 证明 $f \otimes g$ 是 $M \otimes N$ 的可逆线性变换. [提示: 设 $(f \otimes g)(x) = 0$, 其中 $x \in M \otimes N$. 利用 $M \otimes N$ 的基构造去证 $x = 0$.]

9. 设 f_1, f_2 是 M 的线性变换，g_1, g_2 是 N 的线性变换. 证明 $(f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2) = (f_1 \cdot f_2) \otimes (g_1 \cdot g_2)$.

10. 详细证明：G_1 的表示 ρ_1 与 G_2 的表示 ρ_2 的外张量积 $\rho_1 \# \rho_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的表示.

§4 不可约表示与完全可约表示

4.1 群 G 的非零表示 (V, ρ) 称为不可约表示, 如果除了 (0) 和自身以外，(V, ρ) 没有其它的子表示.

用 $\overline{\mathrm{Irr}_F G}$ 来记 G 的所有两两互不同构的不可约 F- 表示作成的集合.

若 (V, ρ) 能分解成不可约表示的直和，则称 (V, ρ) 是完全可约表示.

如同群论中有限单群的分类是重要的一样，确定 G 的所有不可约表示是群表示论的基本任务之一.

引理 设 V 是 G 的任一不可约 F- 表示. 则 V 是正则表示 FG 的商表示.

证 取 $0 \neq v \in V$. 考虑映射 $\pi:\ FG \longrightarrow V$, 其中

$$\pi(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \sum_{g\in G} \lambda_g (gv).$$

则 π 是 G- 模映射. 因为 $\pi(1) = v$, 故 $\pi \neq 0$. 从而 $\mathrm{Im}\,\pi$ 是 V 的非零子表示，故 $\mathrm{Im}\,\pi = V$. 于是 $V \cong FG/\mathrm{Ker}\,\pi$. □

4.2 **例 1** (i) 一维表示是不可约的表示.

(ii) (V, ρ) 不可约当且仅当 (V^*, ρ^*) 不可约 (留作习题).

(iii) (V, ρ) 不可约当且仅当 $(V,\ {}^g\rho)$ 不可约，$\forall g \in G$.

例 2　设 $G=\langle g\rangle$ 是 p 阶循环群，$(\mathbf{Q}G,\rho_{\mathrm{reg}})$ 是 G 的有理正则表示. 令 $U=\mathbf{Q}(g-1)\oplus\mathbf{Q}(g^2-g)\oplus\cdots\oplus\mathbf{Q}(g^{p-1}-g^{p-2})$，则 U 是 G 的不可约 $\mathbf{Q}$- 表示.

事实上，$\forall u=\sum\limits_{i=1}^{p-1}x_i(g^i-g^{i-1})\in U, x_i\in\mathbf{Q}$，则有

$$\begin{aligned}gu&=\sum_{i=1}^{p-1}x_i(g^{i+1}-g^i)\\&=x_1(g^2-g)+\cdots+x_{p-2}(g^{p-1}-g^{p-2})+x_{p-1}(1-g^{p-1})\in U.\end{aligned}$$

因 $G=\langle g\rangle$ 是循环群，故 U 是 $(\mathbf{Q}G,\rho_{\mathrm{reg}})$ 的子表示. 若 U 有子表示 $W\neq 0$, $\dim_F W<p-1$. 则选取 U 的适当基 B 后，$\rho_B(g)$ 有形式 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & D\end{pmatrix}$，从而 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)\cdot\det(\lambda I-D)$，其中 $\varphi(\lambda)$ 表示 $\rho(g)$ 的特征多项式，从而 $\varphi(\lambda)$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的可约多项式. 另一方面，取 U 的一组基 $\{g-1,g^2-g,\cdots,g^{p-1}-g^{p-2}\}$，则 $\rho(g)$ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & & & & -1\\ 1 & 0 & & & -1\\ & 1 & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & 0 & -1\\ & & & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

于是，$\rho(g)$ 的特征多项式为 $\lambda^{p-1}+\cdots+\lambda+1$，熟知它是一个 $\mathbf{Q}$ 上的不可约多项式，从而得到矛盾！ □

4.3 下述关于完全可约表示的几种等价说法是常用的.

引理　下述命题等价：

(i) (V,ρ) 是完全可约表示.

(ii) (V,ρ) 是若干不可约子表示的和.

(iii) (V,ρ) 的任一子表示均有补表示.

(iv) (V,ρ) 的任一不可约子表示均有补表示.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii): 显然.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 设 $V = \sum_{i=1}^{m} V_i$, 其中 V_i 均是不可约表示. 设 U 是 V 的任一子表示. 令 W 是满足 $U \cap W = (0)$ 的维数最大的 V 的子表示. 从而 $U + W = U \oplus W$, 故只需证 $V = U + W$.

若 $U + W$ 是 V 的真子表示, 则存在 V_i 使得 $V_i \not\subseteq U + W$. 因 V_i 不可约, 易知 $(W + V_i) \cap U = (0)$. 由 W 的假设知 $W + V_i = W$, 即 $V_i \subseteq W$, 这与 $V_i \not\subseteq U + W$ 不合.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 显然.

(iv) $\Rightarrow$ (i): 对 V 的维数用归纳法. 取 (V,ρ) 的不可约子表示 U. 因 V 为有限维, U 总存在. 则 $V = U \oplus W$, 其中 W 是 U 的补表示. 注意到 W 的不可约子表示 U' 也是 V 的不可约子表示, 因此 U' 有补表示 W', 即 $V = U' \oplus W'$. 从而 $W = U' \oplus (W' \cap W)$. 由归纳法知 W 是完全可约表示, 从而 V 是完全可约的. □

4.4 引理 设 G 是任一 Abel 群. 则 G 的任一不可约复表示均是一维的.

证 设 (V,ρ) 是 G 的不可约复表示. 由 $g \cdot h = h \cdot g$ 知 $\rho(g) \cdot \rho(h) = \rho(h) \cdot \rho(g)$. 从而 $\{\rho(g) \mid g \in G\}$ 是 V 的一组两两可换的可逆线性变换. 由线性代数知它们有公共的特征向量 v, 即存在 $\lambda_g \in \mathbf{C}$ 使得 $\rho(g) \cdot v = \lambda_g \cdot v$, $\forall g \in G$. 令 $U = \mathbf{C} \cdot v$. 则 U 是 V 的子表示. 由 V 的不可约性知 $V = U$, 即 $\dim_{\mathbf{C}} V = 1$. □

下面的 Schur 引理是简单的, 但却极为重要, 且经常用到, 它表明在不可约表示之间没有 "真正" 的非零同态.

4.5 Schur 引理 设 G 是任一群, (V_1, ρ_1) 和 (V_2, ρ_2) 是 G 的两个不可约 F- 表示.

(i) 若 f 是 V_1 到 V_2 的任一非零 G- 模映射，则 f 必是同构. 从而，若 $\rho_1 \not\cong \rho_2$，则 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$.

(ii) $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$ 是包含 F 的除环.

(iii) 若 F 是代数闭域，则 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_1) = F1_{V_1} \cong F$.

证　(i) 令 $W = \mathrm{Ker} f$. 则 W 是 V_1 的子表示. 因 V_1 不可约且 $f \neq 0$, 故 $W = 0$. 即 f 是单射. 又 $\mathrm{Im} f$ 是 V_2 的子表示且 V_2 不可约，故 $\mathrm{Im} f = V_2$, 从而 f 是同构.

(ii) 显然 $F1_V \subseteq \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$. 由 (i) 即得.

(iii) 因为 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$ 是有限维 F- 空间，故对于任一 $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$, 存在正整数 n 使得 $\alpha, \cdots, \alpha^n$ 是 F- 线性相关的，即 α 是 F 上某一多项式的根；但 F 是代数闭域，故 $\alpha \in F1_{V_1}$. □

4.6　定义　域 F 称为群 G 的一个分裂域，如果对于 G 的任一不可约 F- 表示 V 均有 $\mathrm{Hom}_G(V, V) \cong F$.

群的分裂域是群表示论中的一个重要概念，在第 3 章中我们还要作进一步讨论. 根据 Schur 引理知，代数闭域是任一群的分裂域；而且若 F 是 G 的分裂域，U 是 G 的不可约 F- 表示，则 U 到 U 的任一 G- 模映射均为倍乘 $\lambda 1_V$, $\lambda \in F$.

注意到群的分裂域可以不是唯一的. 例如，只要 $\mathrm{char} F \neq 2$, $\neq 3$, 则 F 就是 S_3 的分裂域，参见 7.6.

4.7　设 (V, ρ) 是有限群 G 的有限维表示. 则存在 (V, ρ) 的有限个子表示的序列

$$(V, \rho) = (V_0, \rho_0) \supset (V_1, \rho_1) \supset \cdots \supset (V_{m-1}, \rho_{m-1}) \supset (V_m, \rho_m) = 0$$

使得每个商表示 $(V_i, \rho_i)/(V_{i+1}, \rho_{i+1})$, $0 \leq i \leq m-1$, 均是不可约表示. 这样的序列称为 V 的一个合成列，$(V_i, \rho_i)/(V_{i+1}, \rho_{i+1})$, $0 \leq i \leq m-1$, 称为该合成列的合成因子.

在 III.3.3 中我们将看出，有限群 G 的互不等价的不可约 F-表示只有有限多个，设为 (U_i,ρ_i)，$i=1,\cdots,n$. Jordan-Hölder 定理指出，G 的每个不可约表示出现在 (V,ρ) 的任一合成列的合成因子中的次数不依赖于合成列的选取，参见定理 III.3.2. 将 (U_i,ρ_i) 出现在 (V,ρ) 的合成列的因子中的个数记为 d_i, 从而得到向量 $(d_1,\cdots,d_n)$, 称为 (V,ρ) 的维数向量，记为 $\underline{\mathbf{dim}}(V,\rho)$. 它是 (V,ρ) 的一个重要的同构不变量.

例 设 $G=\langle g\rangle$ 是 p 阶循环群. 则 G 的正则 $\mathbf{Q}$- 表示有如下合成列:

$$(\mathbf{Q}G,\rho_{\mathrm{reg}})\supset U\supset(0),$$

其中 U 是 4.2 例 2 中的不可约 $\mathbf{Q}$- 表示. 注意到 $(\mathbf{Q}G,\rho_{\mathrm{reg}})=U\oplus\mathbf{Q}z$, 其中 $z=\sum\limits_{1\le i\le p}g^i$, 故

$$(\mathbf{Q}G,\rho_{\mathrm{reg}})\supset\mathbf{Q}z\supset(0)$$

也是 $(\mathbf{Q}G,\rho_{\mathrm{reg}})$ 的一个合成列. 下证 G 只有两个互不等价的不可约 $\mathbf{Q}$- 表示 U 和 $\mathbf{Q}z$.

设 V 是 G 的任一不可约 $\mathbf{Q}$- 表示. 则由习题 2.5 和习题 3.4 知

$$(0)\neq V\cong\mathrm{Hom}_G(\mathbf{Q}G,V)\cong\mathrm{Hom}_G(U,V)\oplus\mathrm{Hom}_G(\mathbf{Q}z,V).$$

因此，由 Schur 引理知 $V\cong U$ 或 $V\cong\mathbf{Q}z$. 于是 $\underline{\mathbf{dim}}\mathbf{Q}G=(1,1)$.

在本节的最后，我们讨论有限群 G 的有限维复表示的一条重要性质. 下述定理表明，对于 G 的复表示 (V,ρ), 可以取到一组特殊的基 B 使得 $\rho_B(g)$, $\forall\, g\in G$, 均是酉矩阵.

4.8　定理　设 (V, ρ) 是有限群 G 的有限维复表示. 则 (V, ρ) 是酉表示, 即存在 V 上的内积 $\langle -, - \rangle$, 使得对于任一 $g \in G$, $\rho(g)$ 均为酉变换, 即有

$$\langle gv_1, gv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \forall\, v_1,\ v_2 \in V.$$

证　取定 V 的任一组基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$. 令 $(-, -)$ 是关于该基的通常内积, 即

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{n} b_j u_j \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i,$$

其中 $\bar{b}_i$ 是 b_i 的共轭复数. 现在利用 $(-, -)$ 作如下双线性型 $V \times V \to \mathbf{C}$:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gv_1, gv_2), \quad \forall\, v_1,\ v_2 \in V.$$

则易验证 $\langle -, - \rangle$ 也是 V 的内积, 即 V 关于 $\langle -, - \rangle$ 作成酉空间. 我们有

$$\begin{aligned} \langle hv_1, hv_2 \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ghv_1, ghv_2) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gv_1, gv_2) \\ &= \langle v_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

这表明 $\rho(h)$, $\forall\, h \in G$, 均是 V 的酉变换. 从而对于 V 关于 $\langle -, - \rangle$ 的任一标准正交基 B, $\rho_B(h)$ 均是酉矩阵, $\forall\, h \in G$. □

4.9　推论　设 (V, ρ) 是有限群 G 的 n 次复表示, $g \in G$, 且 $g^m = 1$ $(m > 0)$. 则存在 V 的一组基 $B(g)$, 使得 $\rho_{B(g)}(g) = \operatorname{diag}\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, ω_i 均为 m 次单位根.

证 由定理 4.8 知 $\rho(g)$ 均是酉变换 (此时 V 视为关于内积 $(-,-)$ 的酉空间), 从而 $\rho(g)$ 可以对角化. 因 $(\rho(g))^m = \rho(g^m) = 1_V$, 故 $\rho(g)$ 的特征值均为 m 次单位根. 注意, 基 $B(g)$ 依赖于 g 的选取. □

习 题

1. 证明完全可约表示的子表示与商表示均是完全可约的. [提示: 对于子表示利用引理 4.3(iv).]

2. 将 Klein 四元群的正则 $\mathbb{C}$ 表示分解成不可约表示的直和.

3. 构造出 n 阶循环群的所有互不等价的不可约复表示.

4. 设 (V,ρ) 是有限群 G 的有限维实表示. 则 (V,ρ) 是正交表示, 即存在 V 上的内积 $\langle -,-\rangle$, 使得对于任一 $g\in G$, $\rho(g)$ 均为正交变换, 即有

$$\langle gv_1, gv_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle, \quad \forall\ v_1,\ v_2 \in V.$$

5. 证明 (V,ρ) 不可约当且仅当 (V^*,ρ^*) 不可约. [提示: 利用可逆的分块上(下)三角矩阵的逆仍是分块上(下)三角矩阵.]

§5 Maschke 定理

记号 以后用 $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 表示域 F 的特征为 0, 或为 $p>0$, 且 $p \nmid |G|$.

本节的目的是证明

5.1 定理(Maschke) 设 G 是有限群, $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 则 G 的任一 F- 表示均是完全可约的, 即 G 的任一 F- 表示均是 G 的不可约 F- 表示的直和.

注 1　Maschke 定理是有限群表示论中具有重要意义的一条定理. 根据这一定理, 有限群的表示论分为两块: 常表示论和模表示论. 前者研究在 $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 的情形下 G 的表示, 这归结为研究 G 上的不可约 F- 表示. 后者研究在特征能整除群的阶的域上的表示. 两者的区别是本质的.

注 2　当 $\mathrm{char}F \mid |G|$ 时, Maschke 定理不再成立. 例如, 设 $\mathrm{char}F = p > 0$, $G = \langle g\rangle$ 是 p 阶循环群. 令 $V = Fe_1 \oplus Fe_2$, $\rho: G \to GL(V)$, 其中 $\rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 (V, ρ) 是 G 的可约表示, 但不是完全可约表示. 事实上, 读者容易验证 (V, ρ) 的子表示 $(Fe_1, \rho|_{Fe_1})$ 没有补表示.

5.2　Maschke 定理的证明　设 (V, ρ) 是 G 的任一 F- 表示. 欲证 (V, ρ) 完全可约, 只要证 (V, ρ) 的任一子表示 U 均有补表示 W.

设 W_0 是 U 的补空间, 即有 F- 空间直和 $V = U \oplus W_0$. 令 p 是 V 到 U 上的投影, 即 $\forall (u, w_0) \in V$, $p((u, w_0)) = u$. 定义 $\psi: V \to U$ 为如下 F- 线性映射:

$$\psi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} p(gv).$$

注意到 ψ 的定义合理性用到 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 显然, $\psi|_U = 1_U$. 下证 ψ 是 G- 模映射. 事实上, $\forall\, g \in G$, $v \in V$, 我们有

$$\begin{aligned}
\psi(g \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} p(hgv) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} g(hg)^{-1} p((hg)v) \\
&= \frac{1}{|G|} g \cdot \sum_{x \in G} x^{-1} p(xv) \\
&= g \cdot \psi(v).
\end{aligned}$$

从而，根据引理 3.1.B 知 U 有补表示. □

Maschke 定理的逆也成立. 我们有

5.3 定理 设 G 是有限群. 若 G 的 F- 正则表示是完全可约的，则 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 从而，G 的任一 F- 表示均是完全可约的当且仅当 $\mathrm{char}F \nmid |G|$.

证 设 G 的 F- 正则表示 $(FG, \rho_{\mathrm{reg}})$ 是完全可约的. 假设 $\mathrm{char}F \mid |G|$. 设 $G = \{g_1 = 1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n\}$, $n = p \cdot q$, 其中 $p = \mathrm{char}F$. 令 $z = \sum\limits_{g \in G} g \in FG$. 则 Fz 是 $(FG, \rho_{\mathrm{reg}})$ 的子表示，从而由 $(FG, \rho_{\mathrm{reg}})$ 的完全可约性知 Fz 有补表示 W, 即有表示的直和 $FG = Fz \oplus W$. 从而

$$1 = az + w, \quad a \in F,\ w \in W.$$

于是 (注意到 $gz = z, \forall g \in G$)

$$w = 1 - az, \quad g_2 w = g_2 - az, \quad \cdots, \quad g_n w = g_n - az.$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i w = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i - anz = z \in Fz \cap W = (0)$, 矛盾！ □

习 题

1. 设 ρ 是有限群 G 的 F- 表示，$N \lhd G$, 且 $\mathrm{char}F \nmid [G : N]$. 证明若 $\rho|_N$ 完全可约，则 ρ 也完全可约.

§6 表示的不可约分解

本节总设 G 是有限群，F 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 根据

Maschke 定理， G 的任一 F- 表示 V 均可分解成

$$V = n_1V_1 \oplus \cdots \oplus n_sV_s,$$

其中 $n_i > 0$, V_i 均为不可约 F- 表示，且 $V_i \not\cong V_j, i \neq j$, n_iV_i 是指 n_i 个 V_i 的直和. 称 V_i 是 V 的不可约分支， n_i 为 V_i 在 V 中的重数. 自然的问题是 V 的这种不可约分解是否唯一？下述定理给出了肯定的回答.

6.1　定理(表示分解的唯一性)　设 $V = n_1V_1 \oplus \cdots \oplus n_sV_s \cong m_1W_1 \oplus \cdots \oplus m_tW_t$ 是表示 V 的两个不可约分解, 即 $n_1, \cdots, n_s$, $m_1, \cdots, m_t > 0$, $V_1, \cdots, V_s$ 是两两互不等价的不可约表示， $W_1, \cdots, W_t$ 是两两互不等价的不可约表示. 则 $s = t$, 且存在 $\{1, \cdots, s\}$ 的一个置换 π 使得 $W_i = V_{\pi(i)}$, $m_i = n_{\pi(i)}$, $1 \leq i \leq s$.

证　这一定理当然是 Maschke 定理和域上有限维代数的有限维表示的 Krull-Schmidt-Remark 定理的推论，参见 III.6. 这里给出一个直接的证明.

根据习题 3.4 和 Schur 引理知，有如下 F- 空间的同构:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(V, W_i) &= \mathrm{Hom}_G(m_1W_1 \oplus \cdots \oplus m_tW_t, W_i)\\ &\cong m_i\mathrm{Hom}_G(W_i, W_i) \neq 0;\end{aligned}$$

另一方面

$$\mathrm{Hom}_G(V, W_i) \cong n_1\mathrm{Hom}_G(V_1, W_i) \oplus \cdots \oplus n_s\mathrm{Hom}_G(V_s, W_i).$$

因此存在 $\pi(i) \in \{1, \cdots, s\}$ 使得 $\mathrm{Hom}_G(V_{\pi(i)}, W_i) \neq 0$. 由 Schur 引理知 $W_i \cong V_{\pi(i)}$, 且这样的 $\pi(i)$ 是唯一的. 这迫使 $t \leq s$; 同理 $s \leq t$, 故 $s = t$.

因此

$$\mathrm{Hom}_G(V, W_i) = n_{\pi(i)}\mathrm{Hom}_G(W_i, W_i).$$

比较 $\mathrm{Hom}_G(V,W_i)$ 的 F- 维数，即得 $n_{\pi(i)}=m_i$. 显然 $\pi: i\mapsto\pi(i)$ 是 $\{1,\cdots,s\}$ 的一个置换. □

6.2 定理(正则表示的不可约分解) G 的任一不可约 F- 表示 (V,ρ) 均是 G 的正则 F- 表示 (FG,ρ_{reg}) 的直和项. 特别地, G 的不可约 F- 表示的个数是有限的.

若 $(V_1,\rho_1),\cdots,(V_s,\rho_s)$ 是 G 的全部互不等价的不可约 F- 表示，则

$$\rho_{\mathrm{reg}}=\left(\frac{\deg\rho_1}{d_1}\right)\rho_1\oplus\cdots\oplus\left(\frac{\deg\rho_s}{d_s}\right)\rho_s,$$

其中 $d_i=\dim_F\mathrm{Hom}_G(V_i,V_i)$, $1\le i\le s$.

特别地，若 F 是 G 的分裂域，则

$$\rho_{\mathrm{reg}}=(\deg\rho_1)\rho_1\oplus\cdots\oplus(\deg\rho_s)\rho_s.$$

证 设 $\rho_{\mathrm{reg}}=n_1\rho_1\oplus\cdots\oplus n_s\rho_s$, $n_i>0$, 是 ρ_{reg} 的不可约分解.

注意到 $f\mapsto f(1)$, $\forall f\in\mathrm{Hom}_G(FG,V)$, 给出了 F- 空间同构

$$\mathrm{Hom}_G(FG,V)\cong V.$$

特别地， $\mathrm{Hom}_G(FG,V)\neq 0$.

另一方面

$$\mathrm{Hom}_G(FG,V)\cong n_1\mathrm{Hom}_G(V_1,V)\oplus\cdots\oplus n_s\mathrm{Hom}_G(V_s,V).$$

因此，存在 i 使得 $\mathrm{Hom}_G(V_i,V)\neq 0$. 由 Schur 引理知 $V\cong V_i$, 且 $\mathrm{Hom}_G(V_j,V)=0, j\neq i$. 令 $d_i=\dim_F\mathrm{Hom}_G(V_i,V_i)$. 则有 $\dim_F V_i=n_i\cdot d_i$, 从而 $n_i=\dfrac{\dim_F V_i}{d_i}$. □

6.3 推论(不可约表示维数、个数与 $|G|$ 的关系) 设 $V_1,\cdots,V_s$ 是 G 的全部不可约 F- 表示， $n_i=\dim_F V_i$, $d_i=\dim_F\mathrm{Hom}_G(V_i,V_i)$.

则

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2}{d_i}.$$

特别地，若 F 是 G 的分裂域，则

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} n_i^2.$$

这一结果显然是对 G 的不可约表示的次数与个数的一个重要限制，它在确定全部不可约表示时十分有用．在第 3 章中我们还将看到，不可约复表示的次数是 $|G|$ 的因子．至于不可约表示个数 s 的群论意义，将在 II.3 中讨论．

习　题

1．设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$，V 是 G 的任一有限维表示．则 V 有直和分解

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m,$$

使得 $\mathrm{Hom}_G(W_i, W_j) = 0$，$i \neq j$，且每个 W_i 在同构意义下仅有唯一的合成因子．

§7　举例确定不可约表示

即使 $\mathrm{char}F \nmid |G|$，要确定 G 的全部（互不等价的）不可约 F-表示也并不容易．在本章的最后，我们应用前面的理论，通过例题说明如何确定有限群的不可约表示．我们也将看到，群的常表示和模表示有着本质的区别．

7.1 1 次表示是最简单的表示. 下述引理表明 G 的 1 次表示可以归结为 Abel 群 G/G' 的 1 次表示, 其中 G' 是 G 的换位子群 (或称为 G 的导群), 即 G 的所有换位子 $ghg^{-1}h^{-1}$, $\forall g, h \in G$, 生成的子群. 熟知 G' 是使 G/N 是 Abel 群的 G 的最小的正规子群 N.

引理 存在双射 $\{G$ 的 1 次表示 $\} \longrightarrow \{G/G'$ 的 1 次表示 $\}$, 使得 G 的 1 次表示均为 G/G' 的 1 次表示的提升.

证 设 (F, ρ) 是 G 的 1 次表示. 则 $\rho: G \longrightarrow GL(F) = F^*$ 是群同态, 从而 $G/\mathrm{Ker}\rho \cong \mathrm{Im}\rho$ 是 Abel 群, 于是 $\mathrm{Ker}\rho \supseteq G'$. 因此, 由引理 3.4 即得. □

7.2 由上述引理可知 S_n 的全部 1 次表示.

若 $n = 1$, 则 S_n 只有一个 1 次表示, 即单位表示.

若 $n = 2$ 且 $\mathrm{char}F = 2$, 则 S_n 只有一个 1 次表示, 即单位表示. 若 $n = 2$ 且 $\mathrm{char}F \neq 2$, 则 S_n 有两个 1 次表示, 即单位表示和 (F, ρ), 其中

$$\rho(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ 偶置换}, \\ -1, & \sigma \text{ 奇置换}. \end{cases}$$

当 $n \geq 3$ 时, $S_n' = A_n$. 因此, 若 $\mathrm{char}F \neq 2$, 则 S_n 有两个 1 次表示, 即单位表示和 (F, ρ), 其中 ρ 定义如上. 若 $\mathrm{char}F = 2$, 则 S_n 只有一个 1 次表示, 即单位表示.

7.3 n 次对称群 S_n 在集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 上有一自然的作用, 由此诱导出 S_n 的置换表示 (FX, ρ), 参见 1.3 例 5. 令

$$V_1 = Fx, \quad \text{其中 } x = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; a_i \in F, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}.$$

则易证 V_1 与 V_2 均是 (FX, ρ) 的子表示, 且 V_1 是 S_n 的单位表示.

引理　(i) 若 $\mathrm{char}F \neq 2$, 则 $\mathrm{Hom}_G(V_2, V_2) = F$.

(ii) 若 $\mathrm{char}F \nmid n$, 则 $FX = V_1 \oplus V_2$ 且 V_2 是 S_n 的 $n-1$ 次不可约表示.

证　注意到 $x_1 - x_i$, $2 \leq i \leq n$, 是 V_2 的一组基.

(i) 设 $f \in \mathrm{Hom}_G(V_2, V_2)$. 令 $f(x_1 - x_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $2 \leq i \leq n$. 则由

$$f((1i)(x_1 - x_i)) = (1i)f(x_1 - x_i)$$

知

$$f(x_1 - x_i) = a_{ii}(x_i - x_1),\ 2 \leq i \leq n,$$

注意，此处用到 $\mathrm{char}F \neq 2$. 再由

$$f((ij)(x_1 - x_i)) = (ij)f(x_1 - x_i)$$

知 $a_{ii} = a_{jj}$, 故 f 是倍乘，即 $\mathrm{Hom}_G(V_2, V_2) \cong F$.

(ii) 若 $\mathrm{char}F \nmid n$, 则易见 $FX = X_1 \oplus X_2$. 设 U 是 V_2 的非零子表示，$0 \neq u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \in U$. 则 $u \notin Fx$, 从而 $a_1, \cdots, a_n$ 中至少有两个不相等. 不妨设 $a_1 \neq a_2$. 于是

$$\begin{aligned} u - (12)u &= a_1x_1 + a_2x_2 - (a_2x_1 + a_1x_2) \\ &= (a_1 - a_2)(x_1 - x_2) \in U, \end{aligned}$$

即 $x_1 - x_2 \in U$. 因为 $(2i)(x_1 - x_2) = x_1 - x_i$, 故 $U = V_2$, 即 V_2 不可约. □

7.4　设 G 是有限群，m 是其指数 (即 G 中所有元素的阶的最小公倍数). 若 F 含有一个 m 次本原单位根 α (即 $\alpha^m = 1$, 但 $\alpha^t \neq 1$, $\forall 1 \leq t < m$), 则 F 含有全部的 m 次单位根，且 $\mathrm{char}F \nmid |G|$.

事实上，若 $\text{char}F = p > 0$，$p \mid |G|$，则 G 中有 p 阶元，从而 $p \mid m$. 于是

$$0 = \alpha^m - 1 = \alpha^{pt} - 1 = (\alpha^t - 1)^p,$$

故 $\alpha^t = 1$.

引理 设 G 是指数为 m 的有限 Abel 群.

(i) 若 F 是 G 的分裂域，则 G 的不可约 F- 表示均是 1 次的.

(ii) 若 F 含有一个 m 次本原单位根，则 G 的不可约 F- 表示均是 1 次的，且恰有 $|G|$ 个 1 次表示.

证 设 (V, ρ) 是 G 的不可约 F- 表示，$\forall g \in G$.

(i) 因 G 是 Abel 群，故 $\rho(g)$ 是 V 到 V 的 G- 模映射. 因 F 是 G 的分裂域，从而 $\rho(g)$ 是倍乘. 又因 V 不可约，故 V 是 1 维的.

(ii) 因 $g^m = 1$，故 $\rho(g)$ 有零化多项式 $x^m - 1$. 因 F 含有 m 次本原单位根，故 $\rho(g)$ 在 F 中有特征值 λ_g. 由 G 是 Abel 群知 $\text{Ker}(\rho(g) - \lambda_g 1_V)$ 是 V 的子表示，从而 $\text{Ker}(\rho(g) - \lambda_g 1_V) = V$，即 $\rho(g)$ 是倍乘 λ_g. 这推出 V 是 1 次的且 F 是 G 的分裂域. 又因 $\text{char}F \nmid |G|$，故由推论 6.3 知 G 有 $|G|$ 个 1 次表示. □

7.5 引理 设 $\text{char}F \nmid |G|$，G 非 Abel. 则 G 的任一 2 次忠实 F- 表示是不可约表示.

证 设 (V, ρ) 是 G 的 2 次忠实 F- 表示. 若 V 可约，则由 Maschke 定理知 V 完全可约. 从而 $\forall g \in G$，$\rho(g)$ 的矩阵为

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \lambda_1(g) & 0 \\ 0 & \lambda_2(g) \end{pmatrix}.$$

故 $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$，即 $ghg^{-1}h^{-1} \in \text{Ker}\rho = \{1\}$，$\forall g, h \in G$，这与 G 非 Abel 不合. □

7.6　例　确定 S_3 在任一域 F 上的全部不可约表示.

情形 1　$\mathrm{char}F \neq 2, \neq 3$.

由引理 7.2 知 S_3 有两个 1 次表示,即单位表示 $(F,1)$ 和 (F,ρ_1),其中 ρ_1 将偶置换变为 1, 奇置换变为 -1. 再由引理 7.3 知 S_3 有一个 2 次不可约表示 (V,ρ), $\mathrm{Hom}_G(V,V)=F$. 由引理 7.3 的证明知

$$\rho((12)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\rho((123)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 (12),(123) 是 S_3 的生成元, 故 ρ 的矩阵表示已确定. 因为 $1^2+1^2+2^2=6$, 故由推论 6.3 知 S_3 恰有三个不可约 F- 表示, 即单位表示, (F,ρ_1) 和 (F^2,ρ).

为了讨论 $\mathrm{char}F \mid 6$ 的情形, 首先注意到下述观察:

断言　设 (V,ρ) 是 G 的不可约 F- 表示, 且 $\dim_F V > 1$, 则 $\rho((123))$ 的特征值不为 1.

否则, 设 U 是 $\rho((123))$ 的属于特征值 1 的特征子空间. $\forall \alpha \in U$, 则有

$$\begin{aligned}
\rho((123))(\rho((12))\alpha) &= (\rho((123))\rho((12)))\alpha \\
&= \rho((123)(12))\alpha \\
&= \rho((12)(132))\alpha \\
&= \rho((12))\rho((123)) \cdot \rho((123))\alpha \\
&= \rho((12))\alpha,
\end{aligned}$$

即 $\rho((12))\alpha \in U$, 从而 U 是 V 的子表示,故 $V=U$. 于是 $\rho((123)) = 1_V$, 从而 $\mathrm{Ker}\rho \supseteq A_3 = S_3'$. 这样, 由引理 3.4 知 ρ 是 S_3/S_3' 的不可

约表示的提升，而 S_3/S_3' 是 2 阶循环群，故 $\deg\rho = 1$，矛盾！

情形 2　$\mathrm{char}F = 2$.

此时 S_3 只有一个 1 次表示，即单位表示. 再由引理 7.3 知 S_3 有一个 2 次不可约 F- 表示 (V,ρ). 下证 S_3 只有这两个不可约 F- 表示. 为此，设 (W,φ) 是 S_3 的任一不可约 F- 表示且 $\dim_F W > 1$.

由于 $(\varphi((12)))^2 = \varphi((12)^2) = 1_W$，故 $x^2 - 1 = (x-1)^2$ 是 $\varphi((12))$ 的零化多项式. 从而 1 是 $\varphi((12))$ 的唯一特征值. 设 v_1 是 $\varphi((12))$ 的特征向量.

令

$$v_2' = v_1 + (123)\cdot v_1 + (132)\cdot v_1.$$

则 $(123)\cdot v_2' = v_2'$，从而由上述断言知 $v_2' = 0$，即

$$v_1 + (123)v_1 = -(132)v_1 = (132)v_1.$$

记 $v_2 = v_1 + (123)v_1 = (132)\cdot v_1$.

显然 $v_2 \notin F\cdot v_1$ (否则，Fv_1 是 W 的子表示，从而 $W = Fv_1$，与假设不合). 考虑 $U = Fv_1 \oplus Fv_2$. 则 U 是 W 的子表示：

$$\varphi((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi((123)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $W = U \cong (V,\rho)$.

情形 3　$\mathrm{char}F = 3$.

此时 S_3 有两个 1 次表示，而且这是 S_3 的全部不可约 F- 表示. 事实上，设 (V,ρ) 是 S_3 的任一不可约 F- 表示. 则 $(\rho(123))^3 = 1_V$. 故 $x^3 - 1 = (x-1)^3$ 是 $\rho((123))$ 的零化多项式，从而 1 是 $\rho((123))$ 的特征值. 于是由上述断言知 $\dim_F V$ 必为 1. □

注　关于对称群 S_n 的复表示，书 [Sim] 有一章专门论述；也可参阅 [V2].

7.7　例　确定二面体群 $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = 1 = b^2, bab = a^3 \rangle$ 的全部不可约实表示.

因为 $a^2 = bab^{-1}a^{-1} \in D_4'$, 故 $D_4' \supseteq \langle a^2 \rangle$. 另一方面, 易见 $\langle a^2 \rangle$ 是 D_4 的正规子群且 $D_4/\langle a^2 \rangle$ 是 4 阶 Abel 群, 因此 $D_4' = \langle a^2 \rangle$. 故由引理 7.1 知 D_4 的一次表示是 Klein 四元群 $D_4/\langle a^2 \rangle$ 的 1 次表示的提升, 从而 D_4 有四个互不等价的 1 次不可约表示. 记为 $(\mathbf{R}, \mathbf{1})$, $(\mathbf{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2, 3$, 其中

$$\rho_1(a) = 1,\quad \rho_1(b) = -1;$$
$$\rho_2(a) = -1,\quad \rho_2(b) = 1;$$
$$\rho_3(a) = \rho_3(b) = -1.$$

利用 D_4 是正方形的对称群这一事实容易得到 D_4 的 2 次表示 $(\mathbf{R}^2, \rho)$, 其中

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

由于 ρ 是忠实表示, 由引理 7.5 知 ρ 是不可约表示. 下面计算 $\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)$. 设 $f \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)$. 令 $f(e_1) = xe_1 + ye_2$, 其中 e_1, e_2 是 $(\mathbf{R}^2, \rho)$ 的一组基. 则由 $f(be_1) = bf(e_1)$ 即知 $y = 0$. 再由 $f(ae_1) = af(e_1)$ 知 $f(e_2) = xe_2$. 故 f 是倍乘 x, 即 $\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho) = \mathbf{R}$.

因为 $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8 = |D_4|$, 故由推论 6.3 知 D_4 恰有上述五个不可约实表示. □

习　题

1. 求 3 阶循环群的全部不可约实表示. [提示: 利用正则表示的不可约分解得到一个二次不可约实表示.]

2. 设 $\mathrm{char}F = p$. 证明 p 阶循环群的不可约 F- 表示只有单位表示.

3. 求二面体群 D_5 的全部不可约实表示.

4. 1.3 例 2 与 7.7 中分别给出的 D_4 的不可约复表示有何关系?

第2章　特征标理论

从前一章我们已经看到，给定有限群 G 的一个 m 维表示，相当于给定了 $|G|$ 个互相有关联的 m 阶可逆阵. 怎样从这 $|G|$ 个 m 阶可逆阵中获得一个简单而本质的数量化的信息，使得我们能够容易地由此判断两个表示是否等价，这就是本章所要讨论的特征标理论. 它是群表示论最有力的工具之一.

本章讲述群表示的特征标理论，包括特征标的定义与基本性质，有限群特征标的正交关系，有限群在分裂域上的不可约常表示的个数的群论意义，特征标表的计算，以及怎样从特征标表读出有限群结构的某些信息. 最后利用整性定理给出有限群的不可约复表示维数的刻画，并且证明 Burnside 可解性定理.

§1　特征标的基本概念

若无声明，本节中群 G 和域 F 均是任意的.

1.1　设 (V,ρ) 是群 G 的 F- 表示. 对于 $g\in G$, 令

$$\chi_\rho(g)=\mathrm{tr}\rho(g),$$

其中 $\mathrm{tr}\rho(g)$ 是 V 上线性变换 $\rho(g)$ 的迹. 由此得到的 G 上的 F-值函数 χ_ρ 称为表示 ρ 的特征标，或称为 G 的一个 F- 特征标；若 $F=\mathbf{C}$, 则称为复特征标. 将表示 ρ 的次数称为特征标 χ_ρ 的次

数，记为 $\deg\chi_\rho$. 若 $\deg\chi_\rho = 1$, 则称 χ_ρ 是线性特征标；若 ρ 是不可约表示，则称 χ_ρ 是不可约特征标.

取定 V 的一组 F- 基 B, 对于 $g \in G$, 设 $\rho(g)$ 在 B 下的矩阵是 $\rho_B(g) = (a_{ij}(g))$. 则 $\chi_\rho(g) = \sum\limits_{i=1}^{|B|} a_{ii}(g)$. 熟知， $\chi_\rho(g)$ 并不依赖于基 B 的选取，它恰是 $\rho(g)$ 在 F 的代数闭包中的全部特征值之和 (重根需重复计算).

令 $\mathrm{Irr}_F G$ 是 G 的所有两两互不同构的不可约 F- 表示的特征标作成的集合， $R_F^+(G)$ 是 G 的全体互不同构的 F- 表示作成的集合， $\mathrm{ch}_F^+(G)$ 是 $R_F^+(G)$ 中所有表示的特征标作成的集合.

1.2 基本性质 1° 设 $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ 是 G 的两个 F- 表示，且 $(V_1,\rho_1) \cong (V_2,\rho_2)$. 则 $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

证 这时存在 F- 线性同构 $f: V_1 \to V_2$ 使得 $\rho_2(g) = f\cdot\rho_1(g)\cdot f^{-1}, \forall g \in G$. 从而

$$\chi_{\rho_2}(g) = \mathrm{tr}\rho_2(g) = \mathrm{tr}(f\cdot\rho_1(g)\cdot f^{-1}) = \mathrm{tr}\rho_1(g) = \chi_{\rho_1}(g). \quad \square$$

注 当 F 是特征零的域时，上述结论的逆也成立，从而特征标完全能“控制”住表示，参见 2.7.

2° χ_ρ 是 G 上的类函数，即 χ_ρ 在 G 的同一共轭类中任两个元上取值相同.

证 设 $g,h \in G$. 则

$$\begin{aligned}\chi_\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}\rho(hgh^{-1}) &= \mathrm{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1})\\ &= \mathrm{tr}\rho(g) = \chi_\rho(g).\end{aligned} \quad \square$$

3° $\chi_\rho(1) = \deg\rho\cdot 1_F$. 特别地，若 $\mathrm{char}F \nmid \deg\rho$, 则 $\deg\rho = \chi_\rho(1)$. (此时将 F 中 1_F 的倍元 $\deg\rho\cdot 1_F$ 视为整数 $\deg\rho$.)

证 $\chi_\rho(1) = \mathrm{tr}\rho(1) = \mathrm{tr}1_V = \deg\rho\cdot 1_F$. $\square$

4° 设 (U,ρ_U) 是 (V,ρ) 的子表示，$(V/U,\rho_{V/U})$ 是其商表示. 令 $\rho'=\rho_U$，$\rho''=\rho_{V/U}$. 则 $\chi_\rho=\chi_{\rho'}+\chi_{\rho''}$ (即 $\chi_\rho(g)=\chi_{\rho'}(g)+\chi_{\rho''}(g)$, $\forall\, g\in G$). 特别地，若 $\rho=\rho_1\oplus\rho_2$, 则 $\chi_\rho=\chi_{\rho_1}+\chi_{\rho_2}$.

证　取 V 的一组基 $B=(v_1,\cdots,v_r,\cdots,v_n)$ 使得 $B_1=(v_1,\cdots,v_r)$ 是 U 的一组基. 则 $B_2=(v_{r+1}+U,\cdots,v_n+U)$ 是 V/U 的一组基. 从而 $\rho_B(g)$ 有如下形式:

$$\rho_B(g)=\begin{pmatrix}\rho'_{B_1}(g) & * \\ 0 & \rho''_{B_2}(g)\end{pmatrix},\quad \forall\, g\in G.$$

由此即得. □

5°　$\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}=\chi_{\rho_1}\cdot\chi_{\rho_2}$, 即 $\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}(g)=\chi_{\rho_1}(g)\cdot\chi_{\rho_2}(g)$, $\forall\, g\in G$.

证　取 ρ_i 的表示空间 V_i 的一组基 $B_i, i=1,2$, 则 $B=B_1\otimes B_2=\{u\otimes v\mid u\in B_1, v\in B_2\}$ 是 $\rho_1\otimes\rho_2$ 的表示空间 $V_1\otimes V_2$ 的一组基. 令 $\rho_{1,B_1}(g)=(a_{ij})_{n\times n}$, $\rho_{2,B_2}(g)=(b_{ij})_{m\times m}=M$. 则 $(\rho_1\otimes\rho_2)_B(g)$ 是分块阵 $(a_{ij}M)_{n\times n}$，于是

$$\begin{aligned}\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}(g)&=\mathrm{tr}(\rho_1\otimes\rho_2)_B(g)=\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)\cdot\mathrm{tr}M\\&=\mathrm{tr}\rho_{1,B_1}(g)\cdot\mathrm{tr}\rho_{2,B_2}(g)=\chi_{\rho_1}(g)\cdot\chi_{\rho_2}(g).\end{aligned}$$ □

类似于 5° 的证明，我们有

6° 设 $\rho_i\in R_F^+(G_i)$, $i=1,2$, $G=G_1\times G_2$, $g=(g_1,g_2)\in G$. 则 $\chi_{\rho_1\#\rho_2}(g)=\chi_{\rho_1}(g_1)\cdot\chi_{\rho_2}(g_2)$.

7° 设 α 是 G 的线性特征标，χ 是 G 的不可约特征标. 则 $\alpha\cdot\chi$ 是 G 的不可约特征标.

证　由 5° 知 $\alpha\cdot\chi$ 是表示 $\rho_1\otimes\rho_2$ 的特征标，其中 ρ_1 的特征标为 α，ρ_2 的特征标为 χ. 由于 ρ_1 是一次表示，ρ_2 是不可约表示，由 $\rho_1\otimes\rho_2$ 的构造易知 $\rho_1\otimes\rho_2$ 也是不可约表示. □

8° 设 ρ^* 是 ρ 的反轭表示. 则 $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$, $\forall\, g \in G$.

证 设 B 是 ρ 的表示空间 V 的一组基, B^* 是对偶空间 V^* 的对偶基. 则由 I.3.2 知 $\rho^*_{B^*}(g) = ((\rho_B(g))^{\mathrm{T}})^{-1} = (\rho_B(g^{-1}))^{\mathrm{T}}$, 由此即得. □

9° 设 $N \lhd G$, $\pi : G \to G/N$ 是典范同态, $(V,\rho) \in R_F^+(G/N)$. 则 ρ 通过 π 的提升所得到的 G 的表示 $(V, \rho\cdot\pi)$ 的特征标是 $\chi_\rho \cdot \pi$. 反之, 设 $(V,\rho) \in R_F^+(G)$ 且 $\mathrm{Ker}\rho \supseteq N$. 则 (V,ρ) 可自然地视为 G/N 的表示, 其特征标为 ψ, 其中 $\psi(gN) = \chi_\rho(g)$, $\forall\, g \in G$. 特别地, 有

$$\mathrm{Irr}_F(G/N) = \{\chi_\rho \in \mathrm{Irr}_F G \mid \mathrm{Ker}\rho \supseteq N\}.$$

证 这由 I.3.4 即得, 并注意到 $\overline{\mathrm{Irr}_F}(G/N) = \{\rho \in \overline{\mathrm{Irr}_F} G \mid \mathrm{Ker}\rho \supseteq N\}$. □

10° 设 $F = \mathbf{C}$. 则 $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$, 这里 $\bar{x}$ 表示 x 的共轭复数.

证 由 I.4.9 知存在 ρ 的表示空间 V 的一组基 B 使得 $\rho_B(g) = \mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 其中 ω_i 均是单位根. 从而

$$\begin{aligned}\chi_\rho(g^{-1}) &= \mathrm{tr}\rho_B(g^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_B(g))^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i^{-1} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i = \overline{x_\rho(g)}.\end{aligned}$$ □

11° 设 $g \in G$, $g^m = 1$ $(m \geq 1)$. 则 $\chi_\rho(g)$ 是 $\deg\rho$ 个 m 次单位根之和. 特别地, 若 m 是有限群 G 的指数 (即 G 中所有元素的阶的最小公倍数), 则 χ_ρ 的值均是 $\deg\rho$ 个 m 次单位根之和.

若 $F = \mathbf{C}$, 则对任一 $g \in G$, 有 $|\chi_\rho(g)| \leq \chi_\rho(1)$; 且等号成立当且仅当 $\rho(g) = \omega \cdot 1_V$, ω 是 m 次单位根; 从而 $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(1)$ 当且仅当 $\rho(g) = 1_V$.

证　若 $g^m = 1$, 则 $\rho(g)^m = 1$, 从而 $\rho(g)$ 的特征根均为 m 次单位根.

若 $F = \mathbf{C}$. 则由 I.4.9 知存在 ρ 的表示空间 V 的一组基 B 使得

$$\rho_B(g) = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \cdots, \omega_n),$$

其中 $n = \deg\rho$, ω_i 均是 m 次单位根，从而

$$|\chi_\rho(g)| = |\omega_1 + \cdots + \omega_n| \le |\omega_1| + \cdots + |\omega_n| = \deg\rho = \chi_\rho(1),$$

且等号成立当且仅当 $\omega_1 = \cdots = \omega_n = \omega$, 即 $\rho(g) = \omega \cdot 1_V$.　□

1.3　例　(i) 设 $\mathbf{1}_G = (F, \mathbf{1})$ 是 G 的单位表示. 仍用 $\mathbf{1}_G$ 记其特征标，称为单位特征标. 则 $\mathbf{1}_G(g) = 1$, $\forall\, g \in G$.

(ii) 设 $(FG, \rho_{\mathrm{reg}})$ 是 G 的正则表示. 用 χ_{reg} 记 ρ_{reg} 的特征标. 则

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1, \\ 0, & g \ne 1. \end{cases}$$

事实上，取 FG 的 F- 基 $G = \{\, g_1 = 1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n \,\}$. 设 $g \in G$, $g \ne 1$, 则 $gg_i \ne g_i$, $1 \le i \le n$. 因此，ρ_{reg} 在基 G 下的矩阵的主对角线上的元全为零，由此即得.　□

(iii) 设 $F = \mathbf{Q}$, $|G| = p$. 则 $G = \langle g \rangle$. 设 (V, ρ) 是 G 的 $\mathbf{Q}$- 正则表示的子表示，其中

$$V = \mathbf{Q}(g - 1) \oplus \mathbf{Q}(g^2 - g) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Q}(g^{p-1} - g^{p-2}).$$

则 (V, ρ) 是 G 的不可约 $\mathbf{Q}$- 表示，参见 I.4.2. 令 χ 是 (V, ρ) 的特征标. 利用基 $\{g - 1,\ g^2 - g,\ \cdots,\ g^{p-1} - g^{p-2}\}$ 可算出

$$\chi(g^t) = \begin{cases} p - 1, & t = 0, \\ -1, & 1 \le t \le p - 1. \end{cases}$$

1.4 特征标表 设 $C_1=\{1\},\cdots,C_s$ 是有限群 G 的全部 (互不相同的) 共轭类, $\overline{\mathrm{Irr}_F}G=\{\rho_1,\cdots,\rho_t\}$, χ_i 是 ρ_i 的特征标, 其中 χ_1 是单位特征标. 令 $\chi_{ij}=\chi_i(g_j)$, $\forall g_j\in C_j$. 设 $h_j=|C_j|$. 则将下述表格称为 G 的 F- 特征标表:

	1	$\cdots$	h_j	$\cdots$	h_s
	C_1	$\cdots$	C_j	$\cdots$	C_s
χ_1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$\vdots$			$\vdots$		
χ_i	χ_{i1}	$\cdots$	χ_{ij}	$\cdots$	χ_{is}
$\vdots$			$\vdots$		
χ_t	χ_{t1}	$\cdots$	χ_{tj}	$\cdots$	χ_{ts}

例如, 设 G 是 n 阶循环群, $G=\langle g\rangle$. 则 G 有 n 个共轭类. 在习题 I.4.3 中我们已构造出 G 的全部 (互不等价的) 不可约复表示, 它们均是 1 维的:

$$\rho_t:\ g\longmapsto \mathrm{e}^{\frac{2\pi t}{n}\mathrm{i}},\quad 0\le t\le n-1.$$

从而 $\chi_{tj}=\chi_t(g^j)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi tj}{n}\mathrm{i}}$, 由此得到 G 的复特征标表.

习　题

1. 设 χ 是由有限 G- 集 X 所诱导的置换表示的复特征标. 证明

$$\chi(g)=|\{x\in X\mid gx=x\}|,\ \forall\, g\in G.$$

2. 设 G' 是 G 的换位子群, 即由全体形如 $ghg^{-1}h^{-1}$, $\forall\, g,\, h\in G$, 的元在 G 中生成的子群. 则

$$\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/G')=\{\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G\mid \chi(1)=1\}.$$

3. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$. 则 $\bar{\chi} \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$, 其中 $\bar{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$.

4. 设 $\chi \in \mathrm{ch}_F^+(G)$. 令 $\mathrm{Ker}\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$. 证明 $\mathrm{Ker}\chi \lhd G$.

5. 设 G 是 n 阶循环群. 证明 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$ 对于特征标的乘法也作成 n 阶循环群; 并求 G 的复特征标表所确定的矩阵的行列式.

6. 设 G 是有限群, $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 且 F 代数闭, ρ_i, $i = 1, \cdots, s$, 是 G 的全部互不等价的不可约 F- 表示, χ_i 是 ρ_i 的特征标. 则

$$\sum_{i=1}^{s}(\deg\chi_i)\chi_i(g) = \begin{cases} |G| \cdot 1_F, & g = 1, \\ 0, & g \neq 1. \end{cases}$$

[提示: 利用定理 I.6.2.]

§2　特征标的正交关系

本节中 G 总是有限群, F 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 我们将研究 G 的不可约特征标之间的第一正交关系, 并给出若干应用.

2.1　设 φ 与 ψ 是 G 上的两个 F- 值函数. 定义 (φ, ψ) 如下:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\varphi(g)\psi(g^{-1}). \tag{1}$$

易见 (φ, ψ) 对于 φ 和 ψ 均是 F- 线性的, 且 $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$. 若 $(\varphi, \psi) = 0$, 则称 φ 与 ψ 正交.

若 χ_1, χ_2 是 G 的两个复特征标, 则由性质 1.2.10° 知

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}. \tag{2}$$

下述定理是特征标理论中最重要的结果, 也是群表示论中最基本的定理之一.

2.2 定理(第一正交关系) 设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ 是有限群 G 的两个不可约 F- 表示，其特征标分别为 χ_1,χ_2. 则

$$(\chi_1,\chi_2)=\begin{cases}(\dim_F \mathrm{Hom}_G(V_1,V_1))1_F, & 若\ \rho_1\cong\rho_2,\\ 0, & 若\ \rho_1\not\cong\rho_2.\end{cases} \tag{3}$$

特别地，若 F 还是 G 的分裂域，则

$$(\chi_1,\chi_2)=\begin{cases}1_F, & 若\ \rho_1\cong\rho_2,\\ 0, & 若\ \rho_1\not\cong\rho_2.\end{cases} \tag{4}$$

此时，$\rho_1\cong\rho_2$ 当且仅当 $\chi_1=\chi_2$, 从而

$$|\overline{\mathrm{Irr}_F}G|=|\mathrm{Irr}_F G|. \tag{5}$$

上述定理有多种证明方法，下面我们采用的方法未用到半单代数的理论，又避免了复杂的矩阵记号．为此，需要建立两个引理．

2.3 设 $(V,\rho)\in R_F^+(G)$, 其特征标为 χ. 令 $\mathrm{Inv}_G(V)=\{v\in V\mid g\cdot v=v,\ \forall\, g\in G\}$. 显然它是 V 的子表示，其特征标记为 $\chi_{\mathrm{Inv}_G(V)}$.

引理 我们有

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Inv}_G(V)}(g).$$

证 考虑 V 的线性变换 $z=\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\rho(g)$. 则 $\rho(h)\cdot z=z\cdot\rho(h)=z$, $\forall h\in G$. 由此即得 $z^2=z$, 即 z 是幂等线性变换，其特征值为 0 和 1, 从而 $V=V_0\oplus V_1$, 其中 V_i 是 z 的属于特征值 i 的特征子空间，$i=0,1$. 易见 $\mathrm{Inv}_G(V)\subseteq V_1$; 反之，设 $v\in V_1$, 即 $z(v)=v$.

则 $g \cdot v = g \cdot z(v) = (\rho(g) \cdot z)(v) = z(v) = v$, 即 $v \in \mathrm{Inv}_G(V)$. 从而 $\mathrm{Inv}_G(V) = V_1$. 因此

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \mathrm{tr}(z) = \mathrm{tr}(z|_{V_1}) = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\Big|_{V_1}\right)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Inv}_G(V)}(g).$$

□

2.4　设 $U, V \in R_F^+(G)$, 其特征标分别为 χ_U 和 χ_V. 在 I.2.5 中我们定义了 $\mathrm{Hom}_F(U,V)$ 的表示结构, 使得 $\mathrm{Hom}_G(U,V)$ 是 $\mathrm{Hom}_F(U,V)$ 的子表示, 且有表示等价 $\mathrm{Hom}_F(U,V) \cong U^* \otimes V$(参见 I.3.3.3).

引理　我们有

$$(\chi_U, \chi_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}_G(U,V)}(g)$$
$$= \dim_F \mathrm{Hom}_G(U,V)\cdot 1_F.$$

证　考虑 $\mathrm{Hom}_F(U,V)$ 的子表示 $\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_F(U,V))$. 容易验证 (留给读者自证)

$$\mathrm{Hom}_G(U,V) = \mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_F(U,V)).$$

于是由性质 1.2.8°、性质 1.2.5°、引理 I.3.3、性质 1.2.1° 和引理 2.3, 我们得到

$$(\chi_U, \chi_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g^{-1})\chi_V(g)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{U^*}(g)\chi_V(g)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{U^*\otimes V}(g)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}_F(U,V)}(g)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_F(U,V))}(g)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}_G(U,V)}(g).$$

□

2.5 定理 2.2 的证明 由引理 2.4 知

$$(\chi_1,\chi_2) = \dim_F \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)\cdot 1_F.$$

若 $\rho_1 \ncong \rho_2$, 由 Schur 引理知 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)=0$, 从而 $(\chi_1,\chi_2)=0$. 若 $\rho_1\cong\rho_2$, 则 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ 恰是 $\dim_F\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1)$ 个 G 的单位表示的直和，因此 $(\chi_1,\chi_2)=(\dim_F\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1))\cdot 1_F$, 由此即得到 (3) 式. □

注 一个自然的问题是：若 F 不是 G 的分裂域，(3) 式中 $(\dim_F\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1))1_F$ 是否非零？答案是否定的，参见习题 1.

下面我们利用特征标的第一正交关系解决群表示的若干基本问题.

2.6 定理(不可约分解的重数) 设 F 是特征为 0 的域. 设 $V=n_1V_1\oplus\cdots\oplus n_sV_s$ 是表示 V 的不可约分解，即 $V_1,\cdots,V_s$ 是 G 的互不等价的不可约表示，$n_1,\cdots,n_s\geq 0$. 则

$$n_i=\frac{(\chi,\chi_i)}{d_i},\ 1\leq i\leq s,$$

其中 χ,χ_i 分别是 V 与 V_i 的特征标，$d_i=\dim_F\mathrm{Hom}_G(V_i,V_i)$.

特别地，若 F 是 G 的分裂域，则 $n_i=(\chi,\chi_i)$, $1\leq i\leq s$.

证　由性质 1.2.4° 和定理 2.2 知

$$(\chi,\chi_i)=\left(\sum_{j=1}^{s}n_j\chi_j,\chi_i\right)=\sum_{j=1}^{s}n_j(\chi_j,\chi_i)$$
$$=\sum_{j=1}^{s}n_j\cdot\delta_{ij}d_i=n_id_i.$$ □

下述定理表明在特征零的域上, 作为 G 上的一个特殊的 F-值类函数, 特征标可以作为 G 的表示的替代物.

2.7　定理(表示等价的判别法)　设 F 是特征为 0 的域, $\rho_1,\rho_2\in R_F^+(G)$. 则 $\rho_1\cong\rho_2$ 当且仅当 $\chi_{\rho_1}=\chi_{\rho_2}$. 特别地, 有

$$|\overline{\mathrm{Irr}_F}G|=|\mathrm{Irr}_F G|.$$

证　⇒: 即性质 1.2.1°.

⇐: 由定理 2.6 即得. □

注　读者会发现定理 2.6 和定理 2.7 的证明用到 $\mathrm{char}F=0$ 这个条件. 事实上, 若 $\mathrm{char}F=p$, 则上述结论不真. 例如, 令 $V_1=F^p$, $\rho_1(g)=1_{V_1},\forall g\in G$; $V_2=F^{2p},\rho_2(g)=1_{V_2},\forall g\in G$. 则 (V_1,ρ_1) 和 (V_2,ρ_2) 是 G 的两个不等价的表示, 但它们的特征标均为零.

2.8　定理(不可约性判别法)　设 F 是特征为 0 的 G 的分裂域. 设 χ 是 G 的 F-表示 ρ 的特征标. 则 ρ 不可约当且仅当 $(\chi,\chi)=1$.

证　设 $\rho=n_1\rho_1\oplus\cdots\oplus n_r\rho_r$, $n_i>0$, $1\le i\le r$, 是 ρ 的不可约分解, χ_i 是 ρ_i 的特征标. 则 $\chi=\sum\limits_{i=1}^{r}n_i\chi_i$. 于是

$$(\chi,\chi)=\sum_{i=1}^{r}n_i^2 1_F.$$

由于 char$F=0$, 故 $(\chi,\chi)=1$ 当且仅当 $r=1$, $n_1=1$, 当且仅当 ρ 不可约. □

注 由定理 2.2 知, 上述定理中, 必要性可换成 "char$F\nmid|G|$ 且 F 是 G 的分裂域", 而充分性只要 "char$F=0$".

习 题

1. 设 char$F=2$, $G=\langle g\rangle$ 是 5 阶循环群. 令

$$V=\{\sum_{0\le i\le 4}a_ig^i\in FG\mid\sum_{0\le i\le 4}a_i=0\}.$$

则 V 是正则表示 FG 的不可约子表示且 $\dim_F\mathrm{Hom}_G(V,V)=4$. 从而由定理 2.2 知 $(\chi,\chi)=0$, 其中 χ 是 V 的特征标.

以下设 $F=\mathbf{C}$.

2. 利用定理 2.8 重新证明性质 1.2.7°.

3. 设 ρ 是以 χ 为特征标的表示, 则单位表示在 ρ 中的重数等于 $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi(g)$.

4. 设 χ 是 G 的非零特征标, $\chi(g)=0$, $\forall\,1\ne g\in G$. 则 χ 是 χ_{reg} 的整倍数.

5. 设 $\chi\in\mathrm{ch}_F^+(G)$, $n\in\{1,2,3\}$, 则 $(\chi,\chi)=n$ 当且仅当 χ 是 n 个不可约特征标之和.

6. 设 χ 是有限 G- 集 X 诱导的置换表示的特征标. 则 $(\chi,\mathbf{1}_G)$ 等于 X 的 G- 轨道的个数.

§3 分裂域上不可约常表示的个数

在定理 I.6.2 中我们已经看到, 当 char$F\nmid|G|$ 时, 有限群 G 的互不等价的不可约 F- 表示的个数是有限的. (事实上, 对于任

一域 F, 这个个数总有限!) 在不同条件下揭示这个个数的群论意义是群表示论的基本任务之一.

本节总假设 G 是有限群, $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 且 F 是 G 的分裂域, 特别地, F 可以是特征不整除 $|G|$ 的代数闭域.

3.1 回顾群 G 上的 F- 值函数 φ 称为类函数, 如果 $\varphi(h^{-1}gh) = \varphi(g)$, $\forall g, h \in G$. 令 $\mathrm{cf}_F(G)$ 是 G 上 F- 值类函数的集合. 则 $\mathrm{cf}_F(G)$ 作成 F 上的向量空间.

任一 F- 特征标属于 $\mathrm{cf}_F(G)$. 利用 Maschke 定理易知, 只要 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, 则类函数 φ 是 F- 特征标当且仅当 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i\chi_i$, 其中 χ_i 是不可约 F- 特征标, a_i 是非负整数.

引理　设群 G 有 s 个共轭类. 则 $\dim_F \mathrm{cf}_F(G) = s$.

证　设 $C_1, \cdots, C_s$ 是 G 的全部共轭类. 令 φ_i 是由 $\varphi_i(C_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le s$, 所确定的 G 上 F- 值类函数. 显然 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s$ 是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的一组 F- 基. □

下述定理是本节的主要结果.

3.2　定理　设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 且 F 是 G 的分裂域. 则有限群 G 的所有互不等价的不可约 F- 表示的特征标是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的一组基; 且 $\forall f \in \mathrm{cf}_F(G)$ 有

$$f = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_F G} (f, \chi)\chi.$$

特别地, G 的不可约 F- 表示的个数等于 G 的共轭类的个数.

注　如果不假定 F 是 G 的分裂域, 或者 $\mathrm{char}F \mid |G|$, 则定理 3.2 的结论不真.

例如, A_4 有四个共轭类，其代表元为 (1), (12)(34), (123), (132); 但是 A_4 只有三个不可约实表示，参见习题 II.4.5.

又如, 若 $\operatorname{char} F = p$, 则 p 阶循环群只有一个不可约 F- 表示，参见习题 I.7.2.

3.3 为了证明上述定理，需作一些准备.

设 $f \in \mathrm{cf}_F(G), (V,\rho) \in R_F^+(G)$. 考虑 V 的线性变换 $\rho_f = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f(g)\rho(g)$, 则 ρ_f 满足如下性质:

(i) ρ_f 是 G- 模映射;

(ii) $\rho_{f_1+f_2} = \rho_{f_1} + \rho_{f_2}, \forall f_1, f_2 \in \mathrm{cf}_F(G)$;

(iii) $\rho_{cf} = c\rho_f, \forall c \in F$;

(iv) $(\rho_1 \oplus \rho_2)_f = (\rho_1)_f \oplus (\rho_2)_f, \forall \rho_1, \rho_2 \in R_F^+(G)$.

这里我们只验证 (i), 其余留给读者. 对于任一 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned}\rho(g)^{-1}\rho_f\rho(g) &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(g^{-1})f(h)\rho(h)\rho(g)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}f(h)\rho(g^{-1}hg)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}f(g^{-1}hg)\rho(g^{-1}hg)\\ &= \rho_f,\end{aligned}$$

即 ρ_f 是 G- 模映射. □

下述引理 A(i) 值得注意.

引理 A 设 (V,ρ) 是 G 的 n 维不可约 F- 表示. 则

(i) $\operatorname{char} F \nmid n$.

(ii) 设 $f \in \mathrm{cf}_F(G)$. 则有 $\rho_f = \dfrac{(f,\chi^*)}{n}\cdot 1_V$, 其中 χ 是 ρ 的特征标, χ^* 是反轭表示 (V^*,ρ^*) 的特征标.

证　因为 ρ_f 是不可约表示 V 到自身的 G- 模映射, 故由 Schur 引理知 $\rho_f = \lambda_f \cdot 1_V$; $\lambda_f \in F$. 两边取迹, 得到 $\mathrm{tr}\rho_f = n\lambda_f$. 从而

$$
\begin{aligned}
n\lambda_f = \mathrm{tr}\rho_f &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(f(g)\cdot\rho(g)) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\chi^*(g^{-1}) \\
&= (f,\chi^*). \qquad (*)
\end{aligned}
$$

取 $f = \chi^*$. 由上式和第一正交关系知

$$n\lambda_{\chi^*} = (\chi^*,\chi^*) = 1_F,$$

从而 $\mathrm{char}\, F \nmid n$. 从而由 (*) 即得到 $\rho_f = \lambda_f 1_V = \dfrac{(f,\chi^*)}{n}1_V$.　□

引理 B　设 $f \in \mathrm{cf}_F(G)$ 满足 $(f,\chi_i^*) = 0$, $1 \le i \le t$, 其中 $\mathrm{Irr}_F G = \{\chi_1,\cdots,\chi_t\}$, χ_i^* 是 χ_i 的反轭特征标. 则 $f = 0$.

证　考虑 G 的 F- 正则表示 ρ_{reg}. 由定理 I.6.2 知 $\rho_{\mathrm{reg}} = \bigoplus\limits_{i=1}^{t} n_i\rho_i$, 其中 ρ_i 是特征标为 χ_i 的不可约表示, $n_i = \dim_F V_i$. 则由上述引理 A(ii) 知

$$
\begin{aligned}
(\rho_{\mathrm{reg}})_f &= \bigoplus_{i=1}^{t}\underbrace{(\rho_i)_f \oplus\cdots\oplus(\rho_i)_f}_{n_i} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{t}\frac{(f,\chi_i^*)}{n_i}\cdot 1_{V_i\oplus\cdots\oplus V_i} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

另一方面, $(\rho_{\mathrm{reg}})_f$ 将 $V = FG$ 中元 1 映为

$$
\begin{aligned}
(\rho_{\mathrm{reg}})_f(1) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)(\rho_{\mathrm{reg}}(g)(1)) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)g \in FG.
\end{aligned}
$$

这迫使 $f(g)=0,\ \forall g\in G$, 即 $f=0$. □

3.4 定理 3.2 的证明 根据特征标的第一正交关系 (定理 2.2 中 (4) 式) 易知 G 的全部不可约 F- 特征标是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 中 F- 线性无关的元: 若 $\chi=\sum\limits_i\lambda_i\chi_i=0$, 则 $\lambda_i=(\chi,\chi_i)=0$.

延用上述引理 B 中的记号, 设 $f\in\mathrm{cf}_F(G)$, 令 $\lambda_i=(f,\chi_i^*)$, $1\le i\le t$. 由于不可约表示的反轭表示仍是不可约的, 从而 $\rho_i^*=\rho_{\pi(i)}$, $\chi_i^*=\chi_{\pi(i)}$, 其中 π 是 $\{1,2,\cdots,t\}$ 的一个置换. 令 $f'=f-\sum\limits_{i=1}^{t}\lambda_i\chi_{\pi(i)}\in\mathrm{cf}_F(G)$. 则

$$\begin{aligned}(f',\chi_j^*)&=(f,\chi_j^*)-\sum_{i=1}^{t}\lambda_i(\chi_{\pi(i)},\chi_j^*)\\&=(f,\chi_j^*)-\sum_{i=1}^{t}\lambda_i(\chi_{\pi(i)},\chi_{\pi(j)})\\&=(f,\chi_j^*)-\lambda_j\\&=0,\quad\forall\ 1\le j\le s.\end{aligned}$$

由上述引理知 $f'=0$, 即 f 是不可约特征标的 F- 线性组合. 于是 G 的不可约 F- 特征标是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的一组基. 而定理 2.2 中 (5) 式表明 G 的不可约 F- 表示的个数等于其不可约 F- 特征标的个数, 故这个个数是 G 的共轭类的个数. □

3.5 设 $C_1=\{1\}, C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的全部共轭类, $h_j=|C_j|$. 由定理 3.2 知 Irr_FG 有 s 个不同的元, 设为 $\chi_1,\cdots,\chi_s$. 令 $\chi_{ij}=\chi_i(g_j)$, 其中 g_j 是 C_j 中任一元. 则第一正交关系可以写成

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t=1}^{s}h_t\chi_i(g_t)\chi_j(g_t^{-1})=\delta_{ij}.\tag{1}$$

特别地, 若 $F=\mathbf{C}$, 则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{l=1}^{s} h_l \chi_{il}\overline{\chi}_{jl} = \delta_{ij}. \tag{2}$$

从 G 的复特征标表来看，(2) 式揭示了行与行之间的关系. 因此，第一正交关系又称为行正交关系. 自然的问题是列与列之间有无类似的关系？下述定理给出了肯定的回答.

定理(第二正交关系)　设 $g_j \in C_j$, $1 \leq j \leq s$. 则有

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g_j)\chi_i(g_k^{-1}) = \frac{|G|}{h_j}\delta_{jk},\ 1 \leq i \leq s. \tag{3}$$

特别地，若 $F = \mathbf{C}$, 则有

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_{ij}\overline{\chi}_{ik} = \frac{|G|}{h_j}\delta_{jk}. \tag{4}$$

证　令 $X = (\chi_{ij})_{s\times s}$, $\overline{X} = (\chi_i(g_j^{-1}))_{s\times s}$, $A = \mathrm{diag}(h_1, \cdots, h_s)$. 则 (1) 式相当于矩阵等式

$$XA\overline{X}^{\mathrm{T}} = |G| \cdot I_s,$$

其中 I_s 是 s 阶单位矩阵. 由此可知 $\overline{X}^{\mathrm{T}}XA = |G| \cdot I_s$, 即 $\overline{X}^{\mathrm{T}}X = |G| \cdot A^{-1}$. 比较此等式的 (k, j)- 元即得到 (3) 式. □

公式 (4) 揭示了复特征标表中列与列之间的关系. 因此，第二正交关系又称为列正交关系. 第二正交关系本质上是第一正交关系的变形，但在应用上亦同等重要，它们均是确定群特征标表的基本工具.

3.6　例　有限群 G 是 Abel 群当且仅当 G 的不可约复表示均是 1 维的，当且仅当 G 有 $|G|$ 个不可约复表示.

事实上，$\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G=\{\chi_1,\cdots,\chi_s\}$，其中 s 是 G 的共轭类的个数. 由引理 I.4.4 知 Abel 群的不可约复表示均是 1 维的. 反之，若 G 的不可约复表示均是 1 维的，则由推论 I.6.3 知 $|G|=\sum_{i=1}^{s}\chi_i(1)^2=\sum_{i=1}^{s}1^2=s$，从而 G 是 Abel 群. □

3.7 例 有限群 G 的线性复特征标的个数等于其换位子群 G' 在 G 中的指数.

事实上，根据引理 I.7.1 知，G 的线性复特征标的个数等于 G/G' 的线性复特征标的个数，而后者为 $|G/G'|=[G:G']$. □

3.8 例 设 H 是在 G 中的指数为 m 的 Abel 子群. 则 G 的任一不可约复表示的维数不超过 m.

事实上，设 (V,ρ) 是 G 的任一不可约复表示. 则 (V,ρ_H) 是 H 的表示. 取 H 的 (V,ρ_H) 的不可约子表示 U. 因 H 是 Abel 群，故 $\dim_{\mathbf{C}}U=1$. 令 $U=\mathbf{C}u$. 令 V' 是由 $\{g\cdot u\mid g\in G\}$ 张成的复向量空间. 则 V' 是 G 的 (V,ρ) 的非零子表示，从而 $V'=V$.

另一方面，设 $G=g_1H\cup\cdots\cup g_mH$ 是左陪集分解. 则 V' 是由 $\{g_iu\mid 1\le i\le m\}$ 张成的复向量空间，从而 $\dim_{\mathbf{C}}V=\dim_{\mathbf{C}}V'\le m$. □

3.9 例 设 F 特征零且是有限群 G_1 与 G_2 的分裂域. 设 $G=G_1\times G_2$. 因为 G 的共轭类个数恰是 G_i 的共轭类个数之积，$i=1,2$，因此由定理 3.2 知 $|\overline{\mathrm{Irr}}_FG|=|\overline{\mathrm{Irr}}_FG_1|\cdot|\overline{\mathrm{Irr}}_FG_2|$. 设 $(V_i,\rho_i)\in\overline{\mathrm{Irr}}_FG_i, i=1,2$. 在 I.3.5 中我们已构造了 G 的表示 $(V_1\otimes V_2,\rho_1\#\rho_2)$. 则由性质 1.2.6° 知 $\chi_{\rho_1\#\rho_2}((g_1,g_2))=\chi_{\rho_1}(g_1)\chi_{\rho_2}(g_2)$，$\forall(g_1,g_2)\in G$.

于是

$$
\begin{aligned}
&(\chi_{\rho_1\#\rho_2},\chi_{\rho_1\#\rho_2})\\
&=\frac{1}{|G_1\times G_2|}\sum_{(g_1,g_2)\in G}\chi_{\rho_1}(g_1)\chi_{\rho_2}(g_2)\chi_{\rho_1}(g_1^{-1})\chi_{\rho_2}(g_2^{-1})\\
&=\left(\frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1\in G_1}\chi_{\rho_1}(g_1)\chi_{\rho_1}(g_1^{-1})\right)\left(\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2}\chi_{\rho_2}(g_2)\chi_{\rho_2}(g_2^{-1})\right)\\
&=(\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_1})(\chi_{\rho_2},\chi_{\rho_2})\\
&=1,
\end{aligned}
$$

由定理 2.8 知 $\rho_1\#\rho_2\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G$. 类似上述证明可知，若 ρ_1,ρ_1' 是 G_1 的不可约 F- 表示， ρ_2,ρ_2' 是 G_2 的不可约 F- 表示，则

$$\rho_1\#\rho_2\cong\rho_1'\#\rho_2' \text{ 当且仅当} \rho_1\cong\rho_1',\ \rho_2\cong\rho_2'.$$

因此

$$\overline{\mathrm{Irr}}_F G=\{\rho_1\#\rho_2\mid\rho_1\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G_1,\ \rho_2\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G_2\}.$$

一般地，设 F 特征零且是有限群 G_i, $1\le i\le m$, 的分裂域. 则有

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{Irr}}_F(G_1\times\cdots\times G_m)\\
&\quad=\{\rho_1\#\rho_2\#\cdots\#\rho_m\mid\rho_i\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G_i,\ 1\le i\le m\}.
\end{aligned}
$$

从而将有限群的直积的不可约 F- 表示归结为因子群的不可约 F- 表示的外张量积.

习　题

1. 求 Klein 四元群的复特征标表.
2. 求 S_3 的复特征标表.

3. 求有限群 G 的复特征标表确定的矩阵的行列式.

4. 设 G 是有限群, g 与 h 是 G 中不共轭的两个元, $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 且 F 是 G 的分裂域. 则存在 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$ 使得 $\chi(g) \neq \chi(h)$.

5. 设 G 是有限群, $g \in G$. 则 g 与 g^{-1} 同属一个共轭类当且仅当 $\chi(g)$ 是实数, $\forall \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$.

6. 求 15 阶群的复特征标表.

7. 设 F 是任一域, (V_i, ρ_i) 是有限群 G_i 的 F- 表示, $i = 1, 2$, $(V_1 \otimes V_2, \rho_1 \# \rho_2)$ 是 $G_1 \times G_2$ 的不可约 F 表示. 则 ρ_1 与 ρ_2 均不可约.

8. 设有限群 G_i 的复特征标表作成的矩阵为 X_i, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \times G_2$ 的复特征标表作成的矩阵为 $X_1 \otimes X_2$.

§4 特征标表计算举例

本节通过例子说明如何利用前面的知识, 特别是行、列正交关系和特征标的基本性质来计算群的特征标表. 以下总在复数域 $\mathbf{C}$ 上考虑.

4.1 n 次对称群 S_n 中任一置换均可唯一分解成没有公共元素的循环置换的乘积; S_n 中任两个置换在 S_n 的同一共轭类中当且仅当它们的上述分解有相同的型. 因此, S_3 有三个共轭类 $\{(1)\}$, $\{(12), (13), (23)\}$, $\{(123), (132)\}$. 由于 S_2 是 2 阶循环群, 故它的两个不可约特征标均是线性的, 易知 S_2 的特征标表为

	(1)	(12)
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

通过典范同态 π : $S_3 \longrightarrow S_2 \cong S_3/A_3$ 将 χ_1, χ_2 提升为 S_3 的线性

特征标，仍记为 χ_1, χ_2. 因 $\pi((123)) = (1)$, 从而得到 S_3 的部分特征标表

	1	3	2
	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3			

令 $n_i = \deg\chi_i$. 则 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$, 故 $n_3 = 2$. 再由列正交关系即知

$$0 = \sum_{i=1}^{3} n_i\chi_i((12)) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2\chi_3((12)),$$

$$0 = \sum_{i=1}^{3} n_i\chi_i((123)) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2\chi_3((123)),$$

由此即得 S_3 的特征标表的第三行为 $(2, 0, -1)$.

接下来考虑 S_4. 同理可知 S_4 的共轭类的代表元为 (1), (12), (123), (12)(34), (1234). 相应的共轭类的基数分别为 1, 6, 8, 3, 6. 令 π 是典范映射 $S_4 \longrightarrow S_3 \cong S_4/K$, 其中 $K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. 将 S_3 的特征标表通过 π 提升，并注意到 $\pi((12)(34)) = (1)$, $\pi((1234)) = (13)$, 从而得到 S_4 的部分特征标表

	1	6	8	3	6
	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4					
χ_5					

由第一列的平方和等于 24 即知 $(\deg\chi_4)^2+(\deg\chi_5)^2=18$. 这迫使 $\deg\chi_4=\deg\chi_5=3$.

设第四行为 $(3,a,b,c,d)$, 则由行正交关系即知

$$\begin{cases}3+6a+8b+3c+6d=0,\\3-6a+8b+3c-6d=0,\\6-8b+6c=0.\end{cases}$$

解得 $b=0,c=-1,d=-a$. 再由行正交关系知

$$9+6\cdot|a|^2+3+6\cdot|a|^2=24,$$

即 $|a|=1$. 因 $a=\chi_4((12))$ 是平方根的和 (由性质 1.2.11°), 故 a 是实数, 从而 $a=\pm1$, 因此第四行为 $(3,\pm1,0,-1,\mp1)$. 再由性质 1.2.7° 知 $\chi_2\chi_4$ 仍是 3 次不可约特征标且 $\chi_2\chi_4\neq\chi_4$, 故 $\chi_5=\chi_2\chi_4$, 从而第五行是 $(3,\mp1,0,-1,\pm1)$. 因此不必计较 χ_4 和 χ_5 的顺序. 故得到 S_4 的特征标表

	1 (1)	6 (12)	8 (123)	3 (12)(34)	6 (1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	−1	1	1	−1
χ_3	2	0	−1	2	0
χ_4	3	1	0	−1	−1
χ_5	3	−1	0	−1	1

4.2 考虑 4 次交错群 A_4. 它有四个共轭类 $\{(1)\}$, $\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$, $\{(123),(142),(134),(243)\}$, $\{(132),(124),(143),(234)\}$. 由例 1.4 知 3 阶循环群 A_3 的特征标表为

	(1)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. 通过典范同态 $\pi: A_4 \longrightarrow A_4/K \cong A_3$ 将 A_3 的特征标表提升为 A_4 的部分特征标表, 并设 A_4 的特征标表的第四行为 (n,a,b,c). 则 $n^2 = 12 - 1^2 - 1^2 - 1^2 = 9$, 即 $n = 3$. 再由列正交关系即可解出 $a = 0, b = 0, c = -1$, 从而 A_4 的特征标表为

	1	4	4	3
	(1)	(123)	(132)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1
χ_3	1	ω^2	ω	1
χ_4	3	0	0	-1

4.3　设 G 是 8 阶非 Abel 群. 在群论中我们已知 G 同构于二面体群 D_4 或四元数群 Q, 其定义关系分别为

$$D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ba)^2 = 1\rangle,$$

$$Q = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ ba = a^3 b\rangle.$$

因 G 是素数幂且 G 非 Abel, 故 $|Z(G)| = 2$ (若 G 的中心 $Z(G)$ 是 4 阶群, 则 $G/Z(G)$ 是循环群, 从而 G 是 Abel 群). 由于 $|G/Z(G)| = 4$, 故 $G/Z(G)$ 是 Abel 群, 从而 G 的换位子群 $G' \subseteq Z(G)$, 这迫使 $G' = Z(G)$ 且 G/G' 是 Klein 四元群 $Z_2 \times Z_2$. 由例 3.7 知 G 恰有四个线性特征标 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$, 它们均是 G/G' 的线性特征标的提升.

设 G 有 s 个不可约特征标 $\chi_i, 1 \le i \le s$. 则 $\sum_{i=1}^{s}(\deg\chi_i)^2 = 8$, 即 $\sum_{i=5}^{s}(\deg\chi_i)^2 = 4$. 由于 $\deg\chi_i \ge 2$, $5 \le i \le s$, 故 $s = 5, \deg\chi_5 = 2$. 设 $G' = Z(G) = \langle x\rangle$, 则 $\{1\},\{x\}$ 是 G 仅有的两个只含一个元的共轭类，其余六个元分属三个基数大于 1 的共轭类，故这三个共轭类的基数均为 2, 设其代表元分别为 a, b, c. 因 G/G' 有四个共轭类，故 a,b,c 在 G/G' 中的像仍分属 G/G' 的三个不同的共轭类. 从而由 Klein 四元群的特征标表得到 G 的部分特征标表

	1	1	2	2	2
	1	x	a	b	c
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2				

再由列正交关系即得 $\chi_5(a) = \chi_5(b) = \chi_5(c) = 0, \chi_5(x) = -2$, 从而得到 G 的特征标表.

这个例子说明不同构的群可能有相同的特征标表.

4.4 考虑二面体群 D_n. 它是平面上的所有保持正 n 边形不变的旋转和反射生成的群，因此其定义关系为 $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$, $|D_n| = 2n$. 由于 D_n 含有 n 阶循环子群 $\langle a\rangle$, 根据例 3.8 知 D_n 的任一不可约复表示的次数 ≤ 2.

设 $n = 2m, m \ge 1$. 则可直接看出 D_n 的下述全部四个 1 维

表示：

$$\rho_1: \text{ 单位表示};$$

$$\rho_2: \ a \mapsto 1, \quad b \mapsto -1;$$

$$\rho_3: \ a \mapsto -1, \quad b \mapsto 1;$$

$$\rho_4: \ a \mapsto -1, \quad b \mapsto -1.$$

剩下的不可约表示均是 2 维的，它们亦可直接构造出来：

$$\tau_l \ (1 \le l \le m-1): \quad a \longmapsto \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}, \quad b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$$

由于这些表示的特征标互不相同，它们是互不等价的不可约表示．再根据不可约表示的次数平方和等于 $2n$ 得知它们是全部的不可约表示．由此得到特征标表

	1	b	ab	$a^k (1 \le k \le m)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	$(-1)^k$
χ_4	1	-1	1	-1
χ_{τ_l} $(1 \le l \le m-1)$	2	0	0	$2\cos\frac{2kl\pi}{n}$

设 $n = 2m+1$, $m \ge 1$. 此时仅有两个 1 维表示，即上述的 ρ_1 和 ρ_2，其余的不可约表示均是 2 维的；上述 τ_l 均是这种不可约表示，但此时 $1 \le l \le m$. 同理可知它们是全部的不可约表示，从而得到特征标表

	1	b	$a^k(1 \le k \le m)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_{π_l} $(1 \le l \le m)$	2	0	$2\cos\frac{2kl\pi}{n}$

4.5 现在确定交错群 A_5 的复特征标表. 我们采用 J. L. Alperin 和 R. B. Bell 书中的方法 (参见 [AB]).

首先, 需要找出 A_5 的共轭类的代表元. 熟知 S_5 中任意两个置换在 S_5 中共轭当且仅当它们分解成互不相交的循环置换之积的型相同, 由此可知 A_5 在 S_5 中有四个共轭类, 其代表元可以选为 (1), (12)(34), (123), (12345), 相应的共轭类的阶为 1, 15, 20 和 24. 但是, A_5 中的两个元素在 S_5 中共轭未必在 A_5 中共轭.

设 $x \in A_5$, C_x 是 S_5 的共轭类且 $x \in C_x$. 则 $|C_x| = [S_5 : C_{S_5}(x)]$, 其中 $C_{S_5}(x)$ 是 x 在 S_5 中的中心化子. 而 x 所在的 A_5 的共轭类含有 $[A_5 : C_{A_5}(x)]$ 个元, 其中 $C_{A_5}(x)$ 是 x 在 A_5 中的中心化子.

如果 $C_{S_5}(x) \not\subseteq A_5$, 则由 A_5 是 S_5 的极大子群可知 $A_5C_{S_5}(x) = S_5$. 因此, 由群的第一同构定理即知

$$\begin{aligned} S_5/A_5 &= A_5 \cdot C_{S_5}(x)/A_5 \cong C_{S_5}(x)/(C_{S_5}(x) \cap A_5) \\ &= C_{S_5}(x)/C_{A_5}(x), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} [A_5 : C_{A_5}(x)] &= \frac{[S_5 : C_{A_5}(x)]}{[S_5 : A_5]} = \frac{[S_5 : C_{A_5}(x)]}{[C_{S_5}(x) : C_{A_5}(x)]} \\ &= [S_5 : C_{S_5}(x)] = |C_x|. \end{aligned}$$

因为 x 所在的 A_5 的共轭类包含在 C_x 中，故上述等式意味着 C_x 也是 x 所在的 A_5 的共轭类.

如果 $C_{S_5}(x)\subseteq A_5$，则 $C_{A_5}(x)=C_{S_5}(x)\cap A_5=C_{S_5}(x)$. 从而

$$[A_5:C_{A_5}(x)]=[A_5:C_{S_5}(x)]=\frac{[S_5:C_{S_5}(x)]}{2}=\frac{1}{2}|C_x|.$$

这表明，此时 C_x 恰好是两个阶相等的 A_5 的共轭类的并，取其中一个共轭类的代表元为 x，则另一共轭类的代表元必为 gxg^{-1}，其中 g 为任一奇置换.

现在分别取 $x=(1),(12)(34)$ 和 (123). 则 x 必与某一奇置换可换： $(12)(34)$ 与 (12) 可换， (123) 与 (45) 可换. 这表明 $C_{S_5}(x)\not\subseteq A_5$，从而由上述讨论知 x 所在的 S_5 的共轭类就是 x 所在的 A_5 的共轭类.

再取 $y=(12345)$. 则 $|C_y|=24\nmid|A_5|$，从而 y 所在的 A_5 的共轭类不可能是 C_y. 于是由以上讨论知 C_y 恰为两个 12 阶的 A_5 的共轭类之并，这两个共轭类的代表元可取 y 与 $(13452)=(12)(12345)(12)$.

综上所述，A_5 有五个共轭类，其代表元为 $(1),(12)(34),(123),(12345),(13452)$，相应的共轭类的阶分别为 1, 15, 20, 12, 12.

因为 A_5 是非 Abel 的单群，故 $A_5'=A_5$. 从而由引理 1.7.1 知 A_5 的线性特征标只有单位特征标 χ_1.

设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$. 则 A_5 自然地作用在 X 上，由此诱导的置换表示的特征标记为 π. 对于任一 $g\in G,\pi(g)$ 恰是 X 中对于 g 的作用不变的元素的个数，参见习题 2.1. 因此，我们有

	1	15	20	12	12
	(1)	(12)(34)	(123)	(12345)	(13452)
π	5	1	2	0	0
$\pi-\chi_1$	4	0	1	-1	-1

由此

$$\begin{aligned}(\pi,\chi_1)&=\frac{1}{|A_5|}\sum_{g\in A_5}\pi(g)\chi_1(g^{-1})\\&=\frac{1}{|A_5|}\sum_{g\in A_5}\pi(g)\\&=\frac{1}{60}(\pi((1))+15\pi((12)(34))+20\pi((123))\\&\quad+12\pi((12345))+12\pi((13452)))\\&=\frac{1}{60}(5+15+20\cdot 2)\\&=1.\end{aligned}$$

这表明 $\pi-\chi_1$ 也是 A_5 的特征标 (参见习题 1). 同理可以算得 $(\pi,\pi)=2$, 从而 $(\pi-\chi_1,\ \pi-\chi_1)=1$. 故 $\chi_2:=\pi-\chi_1$ 是不可约特征标.

令 Y 是 X 的所有二元子集作成的集合. 则 A_5 在 Y 上有自然的作用. 由此诱导的置换表示的特征标记为 ψ. 同理, 对于任一 $g\in G$, $\psi(g)$ 恰是 Y 中对于 g 的作用不变的元素的个数, 由此得到

	1	15	20	12	12
	(1)	(12)(34)	(123)	(12345)	(13452)
ψ	10	2	1	0	0
$\psi-\chi_1$	9	1	0	-1	-1

因为 $(\psi,\chi_1)=1$, 故 $\psi-\chi_1$ 也是 A_5 的特征标, 又因为

$$\begin{aligned}(\psi-\chi_1,\chi_2)&=\frac{1}{|A_5|}(1\cdot 9\cdot 4+15\cdot 1\cdot 0+20\cdot 0\cdot 1\\&\quad+12\cdot(-1)\cdot(-1)+12\cdot(-1)\cdot(-1))\\&=1,\end{aligned}$$

由此可知 $\psi-\chi_1-\chi_2$ 也是 A_5 的特征标. 因为

$$\begin{aligned}(\psi-\chi_1,\psi-\chi_1)&=\frac{1}{|A_5|}(1\cdot 9\cdot 9+15\cdot 1\cdot 1+20\cdot 0\cdot 0\\&\quad+12\cdot(-1)\cdot(-1)+12\cdot(-1)\cdot(-1))\\&=2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\psi-\chi_1,\chi_1)&=\frac{1}{|A_5|}(1\cdot 9+15\cdot 1+20\cdot 0+12\cdot(-1)\\&\quad+12\cdot(-1))\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\psi-\chi_1-\chi_2,\psi-\chi_1-\chi_2)\\&=(\psi-\chi_1,\psi-\chi_1)-2(\psi-\chi_1,\chi_2)+(\chi_2,\chi_2)\\&=1,\end{aligned}$$

故 $\psi-\chi_1-\chi_2$ 是不可约特征标, 且由上述计算知 $\psi-\chi_1-\chi_2\neq\chi_1,\chi_2$. 令 $\chi_3=\psi-\chi_1-\chi_2$. 则得到 A_5 的部分特征标表

	1	15	20	12	12
	(1)	(12)(34)	(123)	(12345)	(13452)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	n_4	a	a'	c	c'
χ_5	n_5	b	b'	d	d'

再由定理 I.6.2 知 $n_4^2+n_5^2=60-1-4^2-5^2=18$, 于是 $n_4=n_5=3$.

利用列正交关系，我们得到

$$1\cdot 1+4\cdot 0+5\cdot 1+3a+3b=0,$$
$$1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1+a^2+b^2=\frac{60}{15}=4,$$

即 $a+b=-2$, $a^2+b^2=2$. 由性质 1.2.11° 知 a 与 b 均是三个平方根的和，从而 $a,b\in\{-3,-1,1,3\}$, 因此 $a=b=-1$.

再由列正交关系，我们有

$$1\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+a'\overline{a'}+b'\overline{b'}=\frac{60}{20}=3,$$

即 $a'\overline{a'}+b'\overline{b'}=0$, 从而 $a'=b'=0$.

因为 $(25)(34)(12345)(25)(34)=(15432)=(12345)^{-1}$, 即 $y=(12345)$ 与 y^{-1} 在 A_5 中共轭，故 $\chi_4(y)=\chi_4(y^{-1})=\overline{\chi_4(y)}$, 即 $c=\bar{c}$, 故 c 为实数. 同理可证 c',d,d' 均为实数. 由列正交关系，我们得到

$$1\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 0+(-1)c+(-1)d=0,$$
$$1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+c^2+d^2=\frac{60}{12}=5,$$

由此即得 $c+d=1, c^2+d^2=3$. 从而 $c^2-c-1=0$, 故 $c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $d=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$, 不妨设 $c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $d=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (只要交换一下 χ_4 与 χ_5 的位置). 同理可证

$$c',d'\in\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

又由行正交关系知

$$3+15(-1)+12c+12c'=0,$$

即 $c+c'=1$. 于是 $c'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $d'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 从而 A_5 的复特征标表为

	1	15	20	12	12
	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(13524)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_5	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

习　题

1. 设 F 是特征为零的代数闭域，χ 是 G 的 F- 特征标，χ_1 是不可约 F- 特征标，且 $(\chi,\chi_1)>0$. 则 $\chi-\chi_1$ 也是 G 的 F- 特征标，且 $\chi-\chi_1$ 是不可约特征标当且仅当 $(\chi-\chi_1,\chi-\chi_1)=1$.

2. 求 6 阶 Abel 群的复特征标表.

3. 求二面体群 D_4 的实特征标表.

4. 求二面体群 D_5 的实特征标表.

5. 求 A_4 的实特征标表. [提示：利用 $A_4\longrightarrow A_4/K$ 和习题 I.7.1 得到 A_4 的一个 2 次不可约实表示；再利用推论 I.6.3 可知 A_4 仅有三个不可约实表示.]

6. 试证 S_5 的复特征标表为

	1	10	20	15	20	30	24
	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(123)(45)	(1234)	(12345)
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_3	4	2	1	0	-1	0	-1
χ_4	4	-2	1	0	1	0	-1
χ_5	5	1	-1	1	1	-1	0
χ_6	5	-1	-1	1	-1	1	0
χ_7	6	0	0	-2	0	0	1

§5 从特征标表读群的结构

从群的特征标表可以得到群的结构方面的许多信息，这是表示理论与结构理论相互联系与作用的体现．前面我们已经体会到这一点，后面还会看到更深刻的联系，例如 Burnside p^aq^b 定理的证明．

本节在复数域 $\mathbf{C}$ 中考虑，群 G 总是有限群．读者可用 §4 中例子来对照本节的结果．

5.1 特征标的核、正规子群 设 $(V,\rho)\in R_F^+(G)$，χ 是 ρ 的特征标．令 $\mathrm{Ker}\chi=\{g\in G\mid \chi(g)=\chi(1)\}$，称为 χ 的核．回顾 $\mathrm{Ker}\rho=\{g\in G\mid \rho(g)=1_V\}\lhd G$，故由性质 1.2.11° 知 $\mathrm{Ker}\chi=\mathrm{Ker}\rho$.

引理 设 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G=\{\chi_1,\cdots,\chi_s\}$，$\chi\in \mathrm{ch}_{\mathbf{C}}^+G$ 且 $\chi=\sum\limits_{i=1}^{s}n_i\chi_i$，$n_i\geq 0$. 则

$$\mathrm{Ker}\chi=\bigcap_{\substack{i\\ n_i>0}}\mathrm{Ker}\chi_i.$$

特别地，$\bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\chi_i = 1$.

证　设 χ 是表示 ρ 的特征标，χ_i 相应的表示为 (V_i, ρ_i), $g \in \mathrm{Ker}\chi$. 则 $\rho(g) = 1_V$. 由于 $\rho = \bigoplus_{i=1}^{s} n_i\rho_i$, 故 $\rho_i(g) = 1_{V_i}$, $\forall i, n_i > 0$, 即 $g \in \mathrm{Ker}\rho_i = \mathrm{Ker}\chi_i$, $\forall i, n_i > 0$. 反之，$\forall g \in \bigcap_{\substack{i \\ n_i > 0}} \mathrm{Ker}\chi_i$, 则 $\chi(g) = \sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i(g) = \sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i(1) = \chi(1)$; 即 $g \in \mathrm{Ker}\chi$.

最后，令 $\chi = \chi\mathrm{reg}$. 因为任一不可约复表示均为 $\rho\mathrm{reg}$ 的直和项 (定理 I.6.2), 故 $\chi\mathrm{reg} = \sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i, n_i > 0$. 从而由 1.3 例 2 知

$$1 = \mathrm{Ker}\chi\mathrm{reg} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\chi_i. \qquad \square$$

这样，由 G 的特征标表不仅可以读出不可约特征标的核，而且可以得到任一特征标的核. 下述命题表明这已穷尽了 G 的全部正规子群.

命题　设 $N \lhd G$, 则 $N = \bigcap_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G \\ N \subseteq \mathrm{Ker}\chi}} \mathrm{Ker}\chi$.

证　令 (V, τ) 是商群 G/N 的正则表示，其特征标记为 ψ. 则 τ 通过典范同态 $\pi: G \longrightarrow G/N$ 可提升为 G 的表示 $(V, \tau\cdot\pi)$, 其特征标为 $\psi\cdot\pi$, 且有 $N = \mathrm{Ker}\pi = \mathrm{Ker}(\tau\pi) = \mathrm{Ker}(\psi\pi)$. 从而由上述引理知 N 是若干 G 的不可约特征标的核的交, 故有 $N = \bigcap_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G \\ N \subseteq \mathrm{Ker}\chi}} \mathrm{Ker}\chi$.

$\square$

5.2　单群　由上述命题即得如下结果:

命题　G 是单群当且仅当 $\mathrm{Ker}\chi = \{1\}$, $\forall \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G$ 且 χ 不是单位特征标.

5.3　商群的特征标表　**命题**　设 $N \lhd G$. 则商群 G/N 的特征标表

可以从 G 的特征标表中得到.

证 由性质 1.2.9° 知 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G/N = \{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G \mid \mathrm{Ker}\chi \supseteq N\}$. 由于 $\mathrm{Ker}\chi$ 可从表中读出, 故不可约 G/N 的特征标可以从 G 的特征标表中读出.

因为 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G/N$ 是 G/N 的类函数空间的一组基, 故 $g+N$ 与 $h+N$ 在 G/N 的同一共轭类中当且仅当 $\chi(g)=\chi(h)$, $\forall \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G/N$. 由此可具体地确定 G/N 的共轭类. □

5.4 换位子群 **命题** 设 G 是指数为 m 的有限群, G' 是 G 的换位子群. 则 $G' = \bigcap\limits_{\substack{\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G \\ \chi(1)=1}} \mathrm{Ker}\chi$.

证 由性质 1.2.9° 和引理 I.4.4 可知

$$\begin{aligned} \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G/G' &= \{\, \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G \mid G' \subseteq \mathrm{Ker}\chi \,\} \\ &= \{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G \mid \chi(1)=1\}. \end{aligned}$$

(事实上, 若 χ 是 G 的一次复表示 ρ 的特征标, 则 $G/\mathrm{Ker}\rho$ 是 $\mathbf{C}^*$ 的子群, 从而可换, 故 $\mathrm{Ker}\chi = \mathrm{Ker}\rho \supseteq G'$.)

于是由命题 5.1 知

$$G' = \bigcap_{\substack{\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G \\ \mathrm{Ker}\chi\subseteq G'}} \mathrm{Ker}\chi = \bigcap_{\substack{\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G \\ \chi(1)=1}} \mathrm{Ker}\chi. \qquad \square$$

5.5 中心 如果每个共轭类的阶已知, 当然中心就清楚了, 它恰是阶为 1 的共轭类之并. 下面给出中心的另一种描述.

设 $\chi \in \mathrm{ch}^+_{\mathbf{C}}(G)$. 令 $Z(\chi) = \{g\in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}$. 则由性质 1.2.11° 知

$$\begin{aligned} Z(\chi) &= \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\omega,\ \omega \text{ 是某一单位根}\} \\ &= \{g\in G \mid \rho(g) = \omega \cdot \mathbf{1}_V,\ \omega \text{ 是某一单位根}\}, \end{aligned}$$

其中 (V,ρ) 是 χ 相应的表示. 由此可见 $Z(\chi)$ 是 G 的正规子群, 且能从特征标表中读出.

命题 $Z(G)=\bigcap\limits_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G}Z(\chi)$.

证 设 $g\in Z(G)$. $\forall\rho\in\overline{\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}}G$, 则 $\rho(g)$ 属于 $\rho(G)$ 的中心, 从而 $\rho(g)$ 诱导出不可约表示 (V,ρ) 到自身的 G- 模映射:

$$\forall\ h\in G,\ v\in V,\ \rho(g)(h\cdot v)=(g\cdot h)\cdot v=h(\rho(g)\cdot v).$$

由 Schur 引理知 $\rho(g)=\omega\cdot 1_V$, 其中 ω 是 $\rho(g)$ 的特征根, 从而是单位根, 故 $g\in\bigcap\limits_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G}Z(\chi)$.

反之, 设 $g\in\bigcap\limits_{\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G}Z(\chi)$. 则对于 $\forall h\in G$, $\rho\in\overline{\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}}G$ 有

$$\begin{aligned}\rho(g^{-1}h^{-1}gh)&=\rho(g)^{-1}\rho(h)^{-1}\rho(g)\rho(h)\\&=\omega^{-1}\cdot 1_V\cdot\rho(h)^{-1}\cdot\omega\cdot 1_V\cdot\rho(h)\\&=1_V.\end{aligned}$$

即

$$g^{-1}h^{-1}gh\in\bigcap_{\rho\in\overline{\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}}G}\mathrm{Ker}\rho=\bigcap_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G}\mathrm{Ker}\chi=1,$$

故 $g\in Z(G)$. □

5.6　可解性　回顾群 G 称为可解群, 如果 G 的导出列 $G\supseteq G'\supseteq G''\supseteq\cdots\supseteq G^i\supseteq\cdots$ 在有限步后终止于 1, 其中每个 G^i 是 G^{i-1} 的换位子群. 在抽象代数中, 我们已知有限可解群有许多等价的条件. 例如, 群 G 是有限可解群当且仅当 G 有正规群列 $G\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_m=1$ (即 $G_i\lhd G$, $1\le i\le m$), 使得 $|G_i/G_{i+1}|$ 均为素数幂. 由于 G 的所有正规子群及其阶均可从 G 的特征标表中读出, 故有限群 G 是否为可解群亦可从表中读出.

5.7 幂零性 令G_1为群G的中心, G_2是G的子群使得$G_2/G_1 = Z(G/G_1)$. 则$G_2 \lhd G$. 一般地, 设G_n是G的子群使得$G_n/G_{n-1} = Z(G/G_{n-1})$. 则$G_n \lhd G$. G称为幂零群, 如果存在$n \geq 1$使得$G_n = G$. 由定义不难看出幂零群一定可解, 但反之未必, S_3和S_4均是这样的例子.

命题 G的幂零性可从特征标表中读出.

证 令$G_1 = Z(G)$, 则G_1可以从表中读出. 令$Z(G/G_1) = G_2/G_1$, 则G_2/G_1可以从G/G_1的特征标表中读出. 再由5.4知G/G_1的特征标可以从G的特征表中读出, 从而G_2可以从G的特征标表中读出. 由此即可知G是否为幂零群. □

习 题

设$F = \mathbf{C}$.

1. (i) G是Abel群当且仅当G的特征标表第一列全为1.

(ii) G的特征标表中第一列为1的个数等于

$$[G : \bigcap_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G \\ \chi(1)=1}} \mathrm{Ker}\chi].$$

2. 设$C_G(g)$是$g \in G$的中心化子, h_g是g所在的共轭类的阶. 则$|C_G(g)|$和h_g均可从表中读出:

(i) $|C_G(g)| = \sum\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G} |\chi(g)|^2$.

(ii) $h_g = \dfrac{|G|}{|C_G(g)|}$.

由此利用4.4求出D_n的共轭类的阶.

3. 设$\rho \in R^+_{\mathbf{C}}(G)$, 其特征标为$\chi, Z = Z(\chi)$. 则

(i) $Z/\mathrm{Ker}\chi$是循环群.

(ii) $Z/\mathrm{Ker}\chi \subseteq Z(G/\mathrm{Ker}\chi)$.

(iii) 若 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$, 则 $Z/\mathrm{Ker}\chi = Z(G/\mathrm{Ker}\chi)$.

4. 设 χ 是 G 的忠实特征标 (即 $\mathrm{Ker}\chi = 1$). 则 H 是 G 的 Abel 子群当且仅当 χ_H 的每个不可约分支是线性的, 其中 χ_H 是相应的限制表示的特征标.

5. 设 $G = H \times K$. 令 $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}H$, $\psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}K$. 则 $\varphi\#\psi$ 是忠实的当且仅当 $|Z(H)|$ 与 $|Z(K)|$ 互素.

6. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$. 则 $\chi(1)^2 \le [G : Z(\chi)]$, 且等号成立当且仅当 $\chi(g) = 0$, $\forall g \in G - Z(\chi)$.

7. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$, $G/Z(\chi)$ 是 Abel 群. 则 $[G : Z(\chi)] = \chi(1)^2$.

§6　整性定理与不可约复表示的维数

本节讨论有限群复特征标值的整性, 并由此得出有限群不可约复表示的维数的性质.

6.1　定义　设 $\alpha \in \mathbf{C}$. 若 α 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中某一首一多项式的根, 则称 α 是代数整数.

例如, 通常的整数是代数整数; 所有复单位根均是代数整数.

6.2　引理　设 α 是有理数且是代数整数. 则 α 是通常的整数.

证　设 $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, 其中 p, q 是互素的整数. 因为 α 是代数整数, 故存在正整数 n 和整数 $c_0, \cdots, c_{n-1}$ 使得

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + c_1\left(\frac{p}{q}\right) + c_0 = 0.$$

两边同乘以 q^n, 即可看出 $q \mid p^n$, 从而 $q \mid p$, 即 $q = 1$, 故 α 是整数. □

6.3 引理 设 $\alpha \in \mathbf{C}$. 则 α 是代数整数当且仅当存在 $\mathbf{C}$ 的包含 α 的子环 B, 且 B 作为加群是有限生成的 (作为定义, 此处子环含有 1).

证 $\Longrightarrow$: 设 α 是代数整数. 令 $B = \mathbf{Z}[\alpha]$ 是 α 的整系数多项式作成的集合. 则 B 是包含 α 的 $\mathbf{C}$ 的子环. 设 α 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中 n 次首一多项式的根. 则 $B = \mathbf{Z}[\alpha]$ 是由 $1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}$ 生成的加群.

$\Longleftarrow$: 设 B 是 $\mathbf{C}$ 的包含 α 的子环且作为加群是有限生成的. 不妨设 $\alpha \neq 0$. 则存在非零复数 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $B = \mathbf{Z}x_1 + \cdots + \mathbf{Z}x_n$. 故

$$\alpha x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \cdots, n.$$

令 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbf{Z})$. 则上式表明

$$(\alpha \cdot I_n - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

于是 $\det(\alpha \cdot I_n - A) = 0$, 即 α 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中首一多项式 $\det(xI_n - A)$ 的根. □

6.4 命题 所有的代数整数作成 $\mathbf{C}$ 的子环.

证 令 $\mathbf{I}$ 是所有代数整数作成的集合. 则 $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{I}$.

设 $\alpha, \beta \in \mathbf{I}$. 则由 6.3 知存在 $\mathbf{C}$ 的子环 A 与 B 使得 $\alpha \in A, \beta \in B$, 且 A, B 作为加群均是有限生成的. 令 $D = A \cdot B = \{\sum\limits_i a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B\}$. 则 D 是 $\mathbf{C}$ 的子环, 且 D 作为加法群也是有限生成的. 因为 $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta \in D$, 故由 6.3 知 $\alpha \pm \beta$, $\alpha \cdot \beta$ 均是代数整数, 即 $\mathbf{I}$ 是 $\mathbf{C}$ 的子环. □

6.5 引理 设 χ 是复特征标. 则 $\chi(g)$ 是代数整数, $\forall g \in G$.

证 由性质 1.2.11° 知 $\chi(g)$ 是单位根之和，从而由命题 6.4 即得. □

6.6 设 G 是有限群， $g\in G$、$C_G(g)$ 是 g 在 G 中的中心化子.

定理 设 χ 是不可约复特征标. 则 $\dfrac{[G:C_G(g)]\chi(g)}{\chi(1)}$ 是代数整数， $\forall g\in G$.

证 设 (V,ρ) 是 χ 相应的不可约复表示. 则由定理 I.6.2 知 (V,ρ) 可以视为正则表示 $(\mathbb{C}G,\rho_{\text{reg}})$ 的子表示. 令 C_g 是 g 所在的共轭类. 考虑 V 的线性变换 $\varphi=\sum\limits_{h\in C_g}\rho(h)$. 则对于任一 $g'\in G$，我们有

$$\begin{aligned}\rho(g')^{-1}\varphi\rho(g')&=\sum_{h\in C_g}\rho(g')^{-1}\rho(h)\rho(g')=\sum_{h\in C_g}\rho(g'^{-1}hg')\\&=\sum_{h\in C_g}\rho(h)=\varphi,\end{aligned}$$

即 $\varphi\rho(g')=\varphi(g')\varphi$. 这表明 φ 还是 V 到 V 的 G- 模映射. 因此由 Schur 引理知 $\varphi=\lambda\cdot 1_V$, 从而

$$\begin{aligned}\lambda\chi(1)=\operatorname{tr}\varphi=\sum_{h\in C_g}\chi(h)&=|C_g|\cdot\chi(g)\\&=[G:C_G(g)]\cdot\chi(g),\end{aligned}$$

即 $\lambda=\dfrac{[G:C_G(g)]\chi(g)}{\chi(1)}$.

考虑 $\mathbb{C}G$ 的线性变换 $\psi=\sum\limits_{h\in C_g}\rho_{\text{reg}}(h)$. 则 ψ 在 V 上的限制恰为 φ. 因此， $\forall\, 0\neq v\in V$, $\psi(v)=\varphi(v)=\lambda\cdot v$, 即 λ 是 ψ 的特征值. 因为 ψ 在基 G 下的矩阵 M 是 0–1 矩阵且 $\det(\lambda I-M)=0$, 即 λ 是首一的整系数多项式 $\det(xI-M)$ 的根，故 $\lambda=\dfrac{[G:C_G(g)]\chi(g)}{\chi(1)}$ 是代数整数. □

6.7 推论 有限群 G 的不可约复表示的维数整除 $|G|$.

证 设 χ 是不可约复特征标, $g_1,\cdots,g_s$ 是 G 的共轭类的代表元. 则由第一正交关系知

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \frac{1}{\chi(1)}\sum_{i=1}^{s}[G:C_G(g_i)]\chi(g_i)\overline{\chi(g_i)}$$
$$= \sum_{i=1}^{s}\frac{[G:C_G(g_i)]\chi(g_i)}{\chi(1)}\cdot\overline{\chi(g_i)}.$$

则由 6.6, 6.5 和 6.4 知 $\frac{|G|}{\chi(1)}$ 是代数整数, 从而由 6.2 知 $\frac{|G|}{\chi(1)}\in\mathbf{Z}$, 即 $\chi(1)\mid|G|$. □

6.8 设 $Z(G)$ 是有限群 G 的中心. 下述定理给出了 G 的不可约复表示的维数较之 6.7 更精确的描述.

定理 设 G 是有限群, $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$. 则 $\chi(1)\mid[G:Z(G)]$.

证 设 (V,ρ) 是 χ 相应的不可约复表示. 任取 $g\in Z(G)$, 则易见 $\rho(g):V\to V$ 是 G- 模映射, 故由 Schur 引理知 $\rho(g)=\lambda(g)\cdot\mathbf{1}_V$, $\lambda(g)\in\mathbf{C}^*$.

考虑 $G^m=G\times\cdots\times G$ 的表示 $(V^{\otimes m}=V\otimes\cdots\otimes V,\ \rho\#\cdots\#\rho)$, 由 3.9 知它是 G^m 的不可约复表示. 易知 $Z(G^m)=Z(G)^m=Z(G)\times\cdots\times Z(G)$. 令 $H_m=\{(g_1,\cdots,g_m)\in Z(G^m)\mid g_1\cdots g_m=1\}$. 则 $H_m\lhd G^m$. $\forall\,(g_1,\cdots,g_m)\in H_m$, 则 $\lambda(g_1)\cdots\lambda(g_m)=1$, 从而对于 $\forall\, v_1\otimes\cdots\otimes v_m\in V^{\otimes m}$, 我们有

$$\begin{aligned}(g_1,\cdots,g_m)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m) &= (g_1v_1)\otimes\cdots\otimes(g_mv_m)\\ &= \lambda(g_1)\cdots\lambda(g_m)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)\\ &= v_1\otimes\cdots\otimes v_m,\end{aligned}$$

这表明 $\mathrm{Ker}(\rho\#\cdots\#\rho)\supseteq H_m$. 因此, 由引理 I.3.4 知 $V^{\otimes m}$ 是 G^m/H_m 的不可约复表示. 令 $|G|=n, |Z(G)|=c$, $\dim_{\mathbf{C}}V=d$. 则

$|G^m/H_m| = \frac{n^m}{c^{m-1}}$. 故由 6.7 知 $d^m \left| \frac{n^m}{c^{m-1}} \right.$, 即 $\frac{n^m}{c^{m-1}\cdot d^m} \in \mathbf{Z}$. 令 $q = \frac{n}{cd} \in \mathbf{Q}$. 则 $cq^m \in \mathbf{Z}, \forall m \in \mathbf{N}$, 从而 q 只能是整数, 即 $d \left| \frac{n}{c} \right.$, 即 $\chi(1) \mid [G : Z(G)]$. □

习　题

1. 设 ρ 是由有限群 G 在集合 G 上的共轭作用诱导的复置换表示, χ 是其特征标. 用 χ_i 的值表达 (χ, χ_i), 其中 χ_i 是任一不可约复特征标. [提示: 利用习题 1.1.]

2. 证明有限群复特征标表的每行和为非负整数. [提示: 利用习题 1.]

3. 设 s 是有限群 G 的共轭类的个数. 令

$$\Omega = \{(a, b) \in G \times G \mid ab = ba\}.$$

则 $|\Omega| = s|G|$. [提示: 考虑 G 在 G 上的共轭作用, 用 $f(g)$ 表示 g 在 G 上作用的不动点的个数, 则 $|\Omega| = \sum\limits_{g \in G} f(g)$; 再用另一种方法计算 $|\Omega|$.]

4. 设 G 是有限群, $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G$. 则 $\chi(1) \mid [G : Z(\chi)]$. [提示: 利用 $Z/\mathrm{Ker}\chi = Z(G/\mathrm{Ker}\chi)$ 及定理 6.8.]

§7　Burnside 可解性定理

本节证明 Burnside 可解性定理, 即 $p^a q^b$ 阶群均是可解群, 其中 p, q 均为素数. 这一证明被认为是群表示论在群结构理论中应用的典范.

7.1　在 5.6 中我们已回顾了可解群的定义, 下面列出在抽象代数中熟知的关于可解群的一些基本事实.

1° 对于有限群 G 来说，下述命题等价：

(1) G 是可解群.

(2) G 有终止于 $\{1\}$ 的次正规群列，即存在 $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_m = \{1\}$，使得每个因子群 G_{i-1}/G_i 均为 Abel 群， $1 \leq i \leq m$.

(3) G 有终止于 $\{1\}$ 的正规群列，即存在 $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_m = \{1\}$ 且 $G_i \triangleleft G$, $1 \leq i \leq m$，使得每个因子群均为 Abel 群， $1 \leq i \leq m$.

(4) G 有终止于 $\{1\}$ 的次正规群列，使得每个因子群均为素阶循环群.

(5) G 有终止于 $\{1\}$ 的次正规群列，使得每个因子群的阶均为素数幂.

(6) G 有终止于 $\{1\}$ 的正规群列，使得每个因子群的阶均为素数幂.

2° 可解群的子群与商群均为可解群.

3° 若 $N \triangleleft G$ 且 N 与 G/N 均为可解群，则 G 是可解群.

4° 对称群 S_n 是可解群当且仅当 $n \leq 4$.

5° 二面体群 D_n 是可解群.

6° p- 群 G(即 $|G|$ 是素数幂) 是可解群.

7.2 引理 设 α 是 n 个复单位根的和，且 $\frac{\alpha}{n}$ 是代数整数. 则 $\alpha = 0$ 或 $\frac{\alpha}{n}$ 是单位根.

证 设 $\alpha \neq 0$ 且 $f(x)$ 是 $\frac{\alpha}{n}$ 在有理数域上的极小多项式， $\beta_1 = \frac{\alpha}{n}, \cdots, \beta_t$ 是 $f(x)$ 的全部复根. 令 $c = \prod\limits_{i=1}^{t} \beta_i$.

令 $H = \mathrm{Gal}(f(x), \mathbf{Q})$. 因为 $f(x)$ 不可约，由 Galois 理论知 H 是 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 的可迁置换群 (例如，参见 [V1], p.204)，即 $\forall \beta_i$, $1 \leq i \leq t$, 存在 $\sigma_i \in H$ 使得 $\sigma_i(\beta_1) = \beta_i$. 因为 β_1 是代数整数， $\sigma_i|_{\mathbf{Q}} = \mathrm{id}$, 故 β_i 均为代数整数，从而由命题 6.4 知 c 是代数整数.

另一方面，$c \in \mathbf{Q}$, 故由引理 6.1 知 $c \in \mathbf{Z}$.

又因 α 是 n 个单位根之和，故 $\sigma_i(\alpha)$ 也是 n 个单位根之和，因此

$$|\beta_i| = \left|\sigma_i\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right| = \frac{|\sigma_i(\alpha)|}{n} \leq 1, \quad 1 \leq i \leq t.$$

从而 $|c| \leq 1$, 但 $c \in \mathbf{Z}$, 故必有 $|c| = 1$, 从而 $|\beta_i| = 1$, $1 \leq i \leq t$.

特别地，$\left|\frac{\alpha}{n}\right| = 1$. 由此推出 $\alpha = n\omega$, ω 为单位根. □

7.3 定理 设有限群 G 有共轭类 C 使得 $|C| = p^t$, 其中 p 为素数，$t \geq 1$. 则 G 非单，即 G 有非平凡的正规子群. 这等价于说，若 G 是非 Abel 的单群，则 $\{1\}$ 是 G 的阶为素数幂的唯一的共轭类.

证 首先，由题设可知 G 非 Abel. 取 $g \in C$. 则 $g \neq 1$. 故由列正交关系知

$$0 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g) = \frac{1}{p} + \sum_{i=2}^{s}\frac{\chi_i(1)\chi_i(g)}{p},$$

其中 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G = \{\chi_1, \cdots, \chi_s\}$, χ_1 是单位特征标.

因为 $\frac{1}{p}$ 不是代数整数，故存在 i, $2 \leq i \leq s$, 使得 $\chi_i(g) \neq 0$, $\frac{\chi_i(1)}{p}$ 不是代数整数，从而 $p \nmid \chi_i(1)$. 于是 $|C|$ 与 $\chi_i(1)$ 互素，从而存在 $a, b \in \mathbf{Z}$ 使得 $a|C| + b\chi_i(1) = 1$. 故

$$\frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = a\frac{|C|\chi_i(g)}{\chi_i(1)} + b\chi_i(g).$$

由定理 6.6 及命题 6.4 可推出 $\frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)}$ 是代数整数，从而由上述引理知 $\frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \omega$, ω 为单位根. 这表明 $1 \neq g \in Z(\chi_i) \lhd G$. 因此，若 $Z(\chi_i) \neq G$, 则 G 非单.

若 $Z(\chi_i) = G$, 则 $\forall h \in G, \rho_i(h) = \omega_h \cdot 1_{V_i}$, 其中 ω_h 是单位根，(V_i, ρ_i) 是 χ_i 相应的表示. 因为 ρ_i 不可约，这迫使 ρ_i 必为 1

次表示；又由于 ρ_i 不是单位表示，故 $\mathrm{Ker}\rho_i \neq G$. 因为 G 非 Abel, 故 $\mathrm{Ker}\rho_i \neq \{1\}$ (否则， G 是 $\mathbf{C}^*$ 的子群). 从而 G 非单. □

7.4 定理 (Burnside) 设 G 是 $p^a q^b$ 阶群，其中 p, q 是素数. 则 G 是可解群.

证 对 $|G|$ 用数学归纳法.

设 H 是 G 的 Sylow p- 子群. 则 $Z(H) \neq \{1\}$. 取 $1 \neq g \in Z(H)$. 则 $H \subseteq C_G(g)$, 从而 $[G:\ C_G(g)] \mid [G:\ H]$, 即 $[G:\ C_G(g)] \mid q^b$, 故 g 所在的共轭类的阶为 q^t, $t \geq 0$.

若 $t \geq 1$, 则由定理 7.3 知存在 $N \lhd G$, $N \neq \{1\}$, $N \neq G$. 故由归纳假设知 N 与 G/N 均为可解群，从而 G 是可解群.

若 $t = 0$, 则 $g \in Z(G)$. 不妨设 $Z(G) \neq G$. 则由归纳假设知 $G/Z(G)$ 可解，从而 G 可解. □

Burnside 于 1904 年用特征标理论证明了上述定理. 至于不用特征标理论的纯群论证明直到 1972 年才由 Bender 给出，而且相当复杂. 这一定理也给出了可解群阶的素因子个数的最佳上界，因为 $p^a q^b r^c$ 阶群未必再是可解群，例如 A_5. 顺便提及， Burnside 又于 1911 年提出 "奇数阶群是可解群" 的猜想，直到 1963 年 W. Feit 和 J. Thompson 才给出了长达 255 页的证明.

第3章　代数的表示

本章用模论的语言介绍代数的表示，侧重于有限维半单代数的结构与模论．代数上的模也是下一章的基本工具．无论是从历史的角度还是从现代研究的角度看，有限维结合代数的表示理论与其它代数结构 (如 Lie 代数、代数群、 Lie 群等) 的表示理论都有紧密的联系和相互影响，尤其在有限群表示中应用广泛．

一方面，读者可以用前两章的知识，从群代数这个具体模型来理解本章的内容；另一方面，将本章的内容应用于群表示不仅可以重新得到前两章的主要结果，而且可以获得新的结果和更一般的观点与方法．

§1　域上代数

我们已经熟知域上向量空间和环的概念．域上结合代数，或简称域上代数，是将这两种结构融于一体的新的代数结构．

1.1　定义　域 F 上的代数，或 F- 代数，是指 F 上的一个向量空间 A, A 同时又是一个环，其中 A 作为 F- 空间的加法群与 A 作为环的加法群是一致的，并且 F- 空间 A 中的数乘和环 A 中的乘法满足

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \quad \forall a, b \in A,\ \lambda \in F.$$

F- 代数 A 称为有限维或无限维代数，取决于 A 作为 F- 空间是有限维还是无限维的． F- 空间 A 的维数称为代数 A 的维数，

记作 $\dim_F A$. 今后我们主要讨论 F 上有限维代数. 注意, 若无特别声明, 本书中的环均指具有单位元的环, 因此 F- 代数 A 都是有单位元的, 从而 $F \subseteq A$ (将 F 等同于 $F1$).

1.2 类似于环论, 可以定义 F- 代数 A 的子代数、左理想、右理想、理想、商代数的概念, 这些定义当然要兼顾 A 的 F- 空间和环的双重结构. 例如, F- 代数 A 的理想 I 是指: I 是环 A 的理想且 I 是 A 的 F- 子空间. 请读者自行写出其余的定义.

F- 代数 A 总有两个非平凡的理想: $\{0\}$ 和 A 本身; 除此之外没有其它理想的非零 F- 代数 A 称为单代数.

设 A,B 是 F- 代数. 映射 $f: A \longrightarrow B$ 称为 F- 代数同态, 如果 f 既是环同态又是 F- 线性映射. 类似地, 我们有 $\mathrm{Ker}f$ 、$\mathrm{Im}f$ 、单同态、满同态、 F- 代数同构等概念.

定理 (i) 设 $f: A \to B$ 是 F- 代数同态. 则 $\mathrm{Ker}f := \{ a \in A \mid f(a) = 0 \}$ 是 A 的理想, 且有 F- 代数同构 $\mathrm{Im}f \cong A/\mathrm{Ker}f$.

(ii) 设 I 是 F- 代数 A 的理想, π 是 A 到商代数 A/I 的典范满同态. 则 π 诱导出如下两个集合之间的一一映射: $\{A\text{的理想}B\text{且} B \supseteq I\} \longrightarrow \{A/I \text{ 的理想}\}$, 其中 $B \longmapsto B/I$; 并且有 F- 代数同构 $A/B \cong (A/I)/(B/I)$.

(iii) 若 I 是 A 的理想, B 是 A 的子代数, 则有 F- 代数同构 $(B+I)/I \cong B/(B \cap I)$.

证明留给读者作为简单的练习.

1.3 **例 1** 域 F 上单变元多项式的全体作成无限维 F- 代数, 记为 $F[x]$.

设 A 是 F- 代数, $a \in A$. 用 $F[a]$ 表示 A 中所有形如 $f(a)$ 的元素的集合, 其中 $f(x) \in F[x]$. 则 $F[a]$ 是 A 的子代数, 称为 a 独生的子代数. 显然 $F[x] \to F[a]$, $f(x) \mapsto f(a)$, 是 F- 代数同态, 其

核为 $I = \{f(x) \in F[x] \mid f(a) = 0\}$. 因此，若 A 是有限维代数，则 $I \neq \{0\}$. 将 I 中次数最低的首一多项式称为 a 在 F 上的极小多项式，记为 $m_a(x)$. 于是 $I = \langle m_a(x) \rangle$.

例 2　F- 代数 A 称为可除代数，如果 A 是除环. 显然可除代数是单代数. 设 D 是有限维可除代数，$a \in D$. 则 $m_a(x)$ 是不可约 F- 多项式. 因此，若 F 是代数闭域，则 $D = F$, 即代数闭域上的有限维可除代数只有 F 本身.

设 D 是有限维可除 F- 代数. 则 D 上 n 阶方阵的集合对于通常的矩阵运算作成 $n^2 \cdot \dim_F D$ 维 F- 代数，记为 $M_n(D)$. 关于 $M_n(D)$, 一个基本事实是：$M_n(D)$ 是单代数 (习题 1)!

设 D 是有限维可除 F- 代数，且 F 是有限域. 则 D 是有限可除环，故由 Wedderburn 定理知 D 是域.

设 V 是域 F 上的 n 维向量空间. 则 $\mathrm{End}_F(V)$ 是 F- 代数且有 F- 代数同构 $\mathrm{End}_F(V) \cong M_n(F)$.

容易验证，形如

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-2} & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-3} & \lambda_{n-2} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

的矩阵集合，其中 λ_i 跑遍 D 中元，作成 $M_n(D)$ 的 n 维子代数，称为 Jordan 子代数，记为 $J_n(D)$.

例 3　设 G 是任一群，FG 是以 G 中元为基的 F- 向量空间. 则 G 中的乘法 F- 双线性地诱导出 FG 中元的乘法. 对于这一乘法，FG 作成 F- 代数，称为 G 在 F 上的群代数. 显然，群 G 的单位元是群代数 FG 的单位元，且 FG 是有限维代数 (或交

换代数) 当且仅当 G 是有限群 (或 Abel 群). 若 H 是 G 的子群, 则 FH 是 FG 的子代数.

设 A 是 F- 代数, 令 $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$. 则 $Z(A)$ 是 A 的子代数, 称为 A 的中心.

设 G 是有限群. 我们来确定群代数 FG 的中心 $Z(FG)$. 设 $C_1, \cdots, C_s$ 是 G 的全部共轭类, $c_i = \sum\limits_{g \in C_i} g \in FG$, $i = 1, \cdots, s$. 称 c_i 为 FG 的一个类和. 我们将说明 $c_1, \cdots, c_s$ 是 $Z(FG)$ 的一组基.

首先, 注意到 $hc_ih^{-1} = \sum\limits_{g \in C_i} hgh^{-1} = \sum\limits_{x \in C_i} x = c_i$, $\forall h \in G$, 因此 $c_i \in Z(FG)$. 反之, 设 $x = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g g \in Z(FG)$, 其中 $\lambda_g \in F$. 则对于任一 $h \in G$ 有 $hxh^{-1} = x$. 比较 x 和 hxh^{-1} 中 g 的系数, 即可得出 $\lambda_g = \lambda_{h^{-1}gh}$. 这表明对于类 C_i 中任意两个元 g 和 g', 系数 λ_g 和 $\lambda_{g'}$ 相同, 记为 λ_i. 从而 $x = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i c_i$. 最后, 易知类和 $c_1, \cdots, c_s$ 是 F- 线性无关的.

研究群 G 的结构与群代数 FG 的结构之间的联系是一个有趣的课题. 在下一节我们还将看到, 群 G 的 F- 表示与群代数 FG 上的模是一回事.

例 4 实数域 $\mathbf{R}$ 上以 e, i, j, k 为基的四维向量空间 $\mathbf{H}$, 按照下表定义乘法:

	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

则易证 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的代数, 其单位元为 e. 对于 $0 \neq x = ae + bi +$

$cj + dk \in \mathbf{H}$, 直接验证可知

$$y = \frac{ae - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

是 x 的逆，即 $xy = yx = e$. 这表明 $\mathbf{H}$ 是可除代数. 可以验证 $\mathbf{H}$ 与

$$\left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}) \;\middle|\; z_1, z_2 \in \mathbf{C} \right\}$$

同构. 这是历史上第一个非交换的有限维可除代数的例子，称为 Hamilton 四元数代数. 顺便提及， Frobenius 证明了 $\mathbf{R}$ 上有限维可除代数只有 $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{H}$ 三种.

1.4　设 $A_1, \cdots, A_n$ 均是 F- 代数，考虑卡氏积 $A_1 \times \cdots \times A_n$. 定义其上的运算为

$$\begin{aligned}
&(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n);\\
&\lambda(a_1, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n), \quad \lambda \in F;\\
&(a_1, \cdots, a_n)(b_1, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n).
\end{aligned}$$

则 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 作成 F- 代数，称为 $A_1, \cdots, A_n$ 的直积.

若 F- 代数 A 是 F- 代数 $A_1, \cdots, A_n$ 的直积，则子代数 $A_i' = \{(0, \cdots, 0, a_i, 0, \cdots, 0) \in A \mid a_i \in A_i\}$ 是 A 的理想， A_i' 作为 F- 代数同构于 A_i, 且 A 作为 F- 向量空间是 $A_1', \cdots, A_n'$ 的直和. 因此，若从内部看，可将 A_i 视为 A 的理想.

若 F- 代数 A 是其理想 $I_1, \cdots, I_n$ 的直和 (作为向量空间的直和), 则 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, $e_i \in I_i$, $i = 1, \cdots, n$. A 的单位元 1 的这种分解是中心分解，即 $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ 且 e_i 均属于 A 的中心. 此时， e_i 恰是 I_i 作为 F- 代数的单位元.

若 $1=e_1+\cdots+e_n$ 是 A 的单位元的中心分解, 令 $A_i=e_iAe_i$. 则 A_i 是 A 的 F- 子代数, 且对任一 $a\in A$ 有

$$\begin{aligned} a &= e_1a+\cdots+e_na \\ &= e_1(ae_1+\cdots+ae_n)+\cdots+e_n(ae_1+\cdots+ae_n) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} e_iae_j. \end{aligned}$$

对于 $i\neq j$, 因为 $e_i\in Z(A)$, 故 $e_iae_j=e_ie_ja=\delta_{ij}e_ia=0$, 从而 $a=e_1ae_1+\cdots+e_nae_n$. 于是得到 F- 代数同构 $A\cong A_1\times\cdots\times A_n$.

综上所述, 我们得到

定理 下述三者存在着一一对应:

(i) A 分解为代数的直积.

(ii) A 是其理想的直和 (作为向量空间的直和).

(iii) A 有单位元的中心分解.

设 $A=A_1\times\cdots\times A_n$, $a\in A$. 则 $a=a_1+\cdots+a_n$, 其中 $a_i\in A_i$, $i=1,\cdots,n$. 称 a_i 是 a 的属于 A_i 的齐次分支.

1.5 定理 设 $A=A_1\times\cdots\times A_n$, I 是 A 的任一左 (右) 理想. 则 $I=I_1\oplus\cdots\oplus I_n$, 其中 I_i 是 A_i 的左 (右) 理想.

特别地, 若 A_i 均为单代数, I 是 A 的理想, 则 I 必为若干 A_i 的直积.

证 令 $I_i=\{a\in A_i\,|a$ 是 I 中某一元的齐次分支 $\}$. 则 I_i 亦是 A_i 的左理想. 设 e_i 是 A_i 的单位元, $a_i\in I_i$. 则有 $a\in I$ 使得 $a=x_1+\cdots+x_n$, 其中 $x_j\in A_j, 1\leq j\leq n$, $x_i=a_i$. 因 $e_ix_j=0, j\neq i$, 故 $a_i=e_ia_i=e_ia\in I$. 这表明 $I_i\subseteq I$. 故 $I=I_1\oplus\cdots\oplus I_n$.

若 I 是 A 的理想，A_i 均为单代数，则 I_i 是 A_i 的理想. 从而 $I_i = 0$ 或 $I_i = A_i$. 因此，I 是若干 A_i 的直积. □

1.6　设 A 是有限维 F- 代数，$0 \neq e \in A$. 若 $e^2 = e$, 则称 e 是 A 的幂等元. 若 e 是 A 的幂等元且 $e \in Z(A)$, 则称 e 是 A 的中心幂等元. 两个幂等元 e_1, e_2 称为正交的，如果 $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. 幂等元 e 称为本原的，如果 e 不能表成 A 的两个正交的幂等元的和. 幂等元 e 称为中心本原的，如果 $e \in Z(A)$ 且 e 不能表示成两个正交的中心幂等元的和.

若 $e_1, \cdots, e_n$ 是 A 的一组两两正交的幂等元，则 $e_1, \cdots, e_n$ 是 F- 线性无关的，因此 $n \leq \dim_F A$.

由定理 1.4 知，A 的单位元能够分解成两两正交的中心幂等元之和当且仅当 A 分解成非零理想的直和.

1.7　命题　(i) 设 e 是 A 的中心幂等元. 则 e 是中心本原幂等元当且仅当 F- 代数 Ae 不能分解成 A 的非零理想的直和.

(ii) 设 e_1, e_2 是 A 的两个中心本原幂等元. 则或 $e_1 = e_2$, 或 e_1 与 e_2 正交.

(iii) 设 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, 且 $e_1, \cdots, e_n$ 是两两正交的中心本原幂等元. 则 $e_1, \cdots, e_n$ 是 A 的全部中心本原幂等元.

证　(i) 类似于 1.4 中的推导.

(ii) 我们有

$$e_1 = e_1e_2 + e_1(1 - e_2).$$

因 e_1, e_2 均为中心幂等元，故可直接验证 e_1e_2 与 $e_1(1 - e_2)$ 均为中心幂等元并且互相正交. 又因 e_1 是中心本原的，故

$$e_1e_2 = 0$$

或

$$e_1(1-e_2)=0,$$

即 $e_1e_2=0$ 或 $e_1=e_1e_2$.

同理，我们有 $e_1e_2=0$ 或 $e_2=e_1e_2$. 从而 e_1 与 e_2 正交或 $e_1=e_1e_2=e_2$.

(iii) 假设 F 是 A 的中心本原幂等元，且 $f\neq e_i$, $1\leq i\leq n$. 则由 (ii) 得到如下矛盾：

$$f=fe_1+\cdots+fe_n=0.$$ □

习　题

1. 可除代数的中心是域.

2. 设 D 是可除 F- 代数. 证明 $M_n(D)$ 是单代数.

3. 设 D 是可除 F- 代数. 证明 $M_n(D)$ 的中心为 $\{z\cdot I_n : z\in Z(D)\}$, 其中 $Z(D)$ 是 D 的中心， I_n 是 n 阶单位阵.

4. 代数 A 的元素 a 称为左 (右) 零因子，如果存在非零元 $b\in A$ 使得 $ab=0$(相应地， $ba=0$). a 称为左 (右) 单位，如果存在 $b\in A$ 使得 $ab=1$(相应地， $ba=1$). 若 a 既是左单位，又是右单位，则称 a 是可逆元. 设 A 是有限维代数. 证明下述结论：

(i) 若 a 是可逆元，则存在唯一的 $b\in A$ 使得 $ab=ba=1$.

(ii) 左零因子必为右零因子；反之亦然.

(iii) 左单位必为右单位；反之亦然.

(iv) A 中任一元或者是零因子或者是单位.

(v) 零因子不是单位.

(vi) 若 A 无零因子，则 A 是可除代数.

5. 设 F 是代数闭域， A 是有限维可除 F- 代数. 则 $A=F$.

6. 在同构意义下, $\mathbf{R}$ 上的 2 维代数只有 $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{C}$ 和 $J_2(\mathbf{R})$ 三种.

7. 任一中心幂等元均可表成两两正交的中心本原幂等元的和.

§2 代数上的模范畴

作为基本的教程,我们仍然仅考虑有限维代数上的有限维模,读者可以自行地将基本的概念和某些结果改成任一代数上的任一模.

2.1　定义 1　设 A 是有限维 F- 代数, V 是有限维 F- 向量空间. 如果存在 F- 代数同态 ρ: $A \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$, 则称 (V,ρ) 是 A 的一个 F- 表示.

A 的两个 F- 表示 (M,ρ) 与 (N,η) 称为等价的, 如果存在 F- 线性同构 f : $M \longrightarrow N$ 使得

$$f\rho(a) = \eta(a)f,\ \forall a \in A.$$

此时 $\rho(a)$ 在 M 的一组基 B 下的矩阵与 $\eta(a)$ 在 N 的基 $f(B)$ 下的矩阵相等, $\forall a \in A$. 等价的表示视为同一表示.

显然, 若 $A = F$, 则 A- 模就是 F- 向量空间.

与群表示一样, 代数 A 的表示 V 的实质是 A 在向量空间 V 上的线性作用. 因此, 今后我们将更多地使用如下定义:

定义 2　设 A 是有限维 F- 代数, V 是有限维 F- 空间. 如果存在映射 $A \times V \to V$: $(a,v) \mapsto av \in V$, $\forall (a,v) \in A \times V$, 满足

(i)　$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2,\quad \forall a \in A, v_1, v_2 \in V$;

(ii)　$(\lambda a)v = a(\lambda v) = \lambda(av),\quad \forall a \in A, \lambda \in F, v \in V$;

(iii) $(a+b)v = av + bv, \quad \forall a, b \in A, v \in V$;

(iv) $(ab)v = a(bv), \quad \forall a, b \in A, v \in V$;

(v) $1v = v, \quad \forall v \in V$,

则称 V 是左 A- 模.

与群表示一样，说“ V 是 A 的 F- 表示”与说“ V 是左 A- 模”是一回事. 事实上，若 (V, ρ) 是 A 的 F- 表示，定义 $av = \rho(a)(v), \forall a \in A, v \in V$, 则 V 作成左 A- 模. 反之，若 V 是左 A- 模，定义 F- 代数同态 $\rho: A \to \mathrm{End}_F(V)$, 它将 A 中元 a 送到 V 的线性变换 $\rho(a)$, 其中 $\rho(a)(v) = av, \ \forall v \in V$, 则得到 A 的 F- 表示 (V, ρ).

与左 A- 模相类似，可以定义右 A- 模的概念.

定义 3 设 V 是有限维 F- 空间. 如果存在映射 $V \times A \to V: (v, a) \longmapsto va \in V, \ \forall (v, a) \in V \times A$, 满足

(i) $(v_1 + v_2)a = v_1 a + v_2 a, \quad \forall a \in A, v_1, v_2 \in V$;

(ii) $v(\lambda a) = (\lambda v)a = \lambda(va), \quad \forall \lambda \in F, a \in A, v \in V$;

(iii) $v(a+b) = va + vb, \quad \forall a, b \in A, v \in V$;

(iv) $v(ab) = (va)b, \quad \forall a, b \in A, v \in V$;

(v) $v1 = v, \quad \forall v \in V$,

则称 V 是右 A- 模.

同样的道理, 说“ V 是 A 的 F- 表示”与说“ V 是右 A- 模”是一回事，但此时对于表示 (V, ρ), 线性变换 $\rho(a)$ 必须写在 V 中元的右边，即 $(v)\rho(a) = va$, 才能保证 $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. 另一方面，给定 A 的表示 (V, ρ), 至于将线性变换 $\rho(a)$ 写在 V 中元的左边还是右边完全是随意的，但使用前者则得到左 A- 模，使用后者则得到右 A- 模.

对于任一 F- 代数 A, 在 F- 向量空间 A 上定义新的乘法 $\circ$ 如下： $a \circ b = ba, \ \forall a, b \in A$. 由此得到的 F- 代数称为 A 的反代数,

记为 A^{op}. 任一左 A- 模 V 按 $va := av$ 的方式自然地视为右 A^{op}-模. 因此, 以下我们只对左 A- 模进行叙述, 对于右 A- 模的讨论完全是平行的.

2.2　设 M 是左 A- 模. 若 N 是 M 的 F- 子空间且 $aN \subseteq N$, $\forall a \in A$, 则称 N 是 M 的子模.

设 N 是 M 的子模. 则商空间 M/N 可自然地作成 A- 模:

$$a(m+N) = am+N, \quad \forall a \in A,\ m+N \in M/N,$$

称为 M 关于 N 的商模.

设 M, M' 均为左 A- 模. F- 线性映射 $f: M \to M'$ 称为 A-模同态, 如果

$$f(am) = af(m), \ \ \forall a \in A,\ m \in M.$$

用 $\operatorname{Hom}_A(M, M')$ 来记所有 M 到 M' 的 A- 模同态作成的集合.

类似地, 我们有 A- 模单同态、满同态和 A- 模同构映射的概念. 若存在 A- 模同构映射 $f: M \to M'$, 则称模 M 与模 M' 同构, 记为 $M \cong M'$. 模 M 与模 M' 同构当且仅当它们相应的表示等价. 同构的模被视为同一模.

请读者自行定义模同态的核与像, 并写出相应于引理 I.2.4 的结论. 下述引理的证明留给读者.

引理　设 M 是左 A- 模, N 是其子模. 令 $\overline{M} = M/N$, $\pi: M \to M/N$ 是典范模同态, 即 $\pi(m) = m+N$, $\forall m \in M$.

(i) π 诱导出如下两个集合之间的一一映射: $\{M$ 的子模 L 且 $L \supseteq N\} \longrightarrow \{\overline{M}$ 的子模$\}$, 其中 $L \longrightarrow L/N$; 并且有左 A- 模同构 $M/L \cong (M/N)/(L/N)$.

(ii) 设 L 是 M 的子模. 则有 A- 模同构 $(L+N)/N \cong L/(L\cap N)$.

2.3 设 M 是左 A- 模. 令 $\operatorname{ann}(M) := \{a \in A \mid aM = 0\}$. 则 $\operatorname{ann}(M)$ 是 A 的理想, 称为 M 的零化理想. 若 $\operatorname{ann}(M) = 0$, 则称 M 是忠实 A- 模.

设 I 是 A 的理想且 $I \subseteq \operatorname{ann}(M)$. 则 M 可自然地看成左 A/I-模:

$$(a+I)m := am, \quad \forall a \in A,\ m \in M.$$

特别地, M 作为 $A/\operatorname{ann}(M)$- 模是忠实的.

反之, 任一商代数 A/I 上的左模 M 亦可看成左 A- 模:

$$am := (a+I)m, \quad \forall a \in A,\ m \in M,$$

且 $\operatorname{ann}(M) \supseteq I$. 由此得到

引理 设 I 是 A 的理想. 则存在如下两个集合之间的一一映射:

$$\{\text{左 } A/I\text{- 模 } M\} \longrightarrow \{\text{左 } A\text{- 模 } M \text{ 且 } \operatorname{ann}(M) \supseteq I\}.$$

2.4 设 M, N 均为左 A- 模. 则 F- 空间的直和 $M \oplus N$ 按如下自然的作用作成 A- 模:

$$a(m,n) = (am, an), \quad \forall a \in A,\ (m,n) \in M \oplus N.$$

称为模 M 与 N 的直和. 类似地定义模 $M_1, \cdots, M_n$ 的直和 $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

根据定义, 模 V 同构于模 $M_1, \cdots, M_n$ 的直和当且仅当存在 V 的子模 V_i, 使得 $V_i \cong M_i$, $i = 1, \cdots, n$, 满足

$$V = V_1 + \cdots + V_n,$$

$$V_i \cap (V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

容易证明如下引理 (参照习题 I.3.4):

引理　设 M_1, M_2, M_3 均是左 A- 模. 则有 F- 向量空间的同构:

$$\mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2,\ M_3) \cong \mathrm{Hom}_A(M_1, M_3) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3),$$
$$\mathrm{Hom}_A(M_3, M_1 \oplus M_2) \cong \mathrm{Hom}_A(M_3, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_3, M_2).$$

2.5　任一左 A- 模 M 均有两个平凡的子模: $\{0\}$ 和 M 本身. 若非零模 M 仅有这两个子模, 则称 M 是单 A- 模 (或称 M 是 A 的不可约表示).

若模 M 是若干个单 A- 模的直和, 则称 M 是半单模 (或称为 A 的完全可约表示).

类似于引理 I.4.3, 我们有

引理 1　下述命题等价:

(i) M 是半单 A- 模.

(ii) M 是其若干单子模的和.

(iii) M 的任一子模 N 均有补子模 W, 即 $M = N \oplus W$.

(iv) M 的任一单子模均有补子模.

引理 2　半单模的子模与商模均为半单模.

证　设 M 是半单模, N 是 M 的子模. 为证 N 是半单模, 只要证明 N 的任一子模 U 在 N 中均有补子模. 根据上述引理知 U 在 M 中有补子模 W. 即 $M = U \oplus W$, 于是 $N = U \oplus (N \cap W)$, 即 U 在 N 中的补子模为 $N \cap W$.

再由上述引理知 N 在 M 中有补子模 V, 从而 $M/N \cong V$, 而 V 是 M 的子模, 故 V 是半单模, 于是 M/N 是半单模. □

2.6　Schur 引理　设 M, N 均为单 A- 模.

(i) 若存在 $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, 则 $M \cong N$. 从而, 若 $M \not\cong N$, 则 $\mathrm{Hom}_A(M,N)=0$.

(ii) $\mathrm{End}_A(M) := \mathrm{Hom}_A(M,M)$ 是有限维可除 F- 代数. 特别地, 若 F 是代数闭域, 则 $\mathrm{End}_A(M) = F1_M \cong F$.

证明留给读者 (参照引理 I.4.5).

2.7 例 1 设 A 是 F- 代数, 对于任意 $a, x \in A$, 规定 a 在 x 上的作用为 A 中乘积 ax. 则 A 作成左 A- 模, 称为左正则 A- 模. I 是左正则 A- 模的子模当且仅当 I 是 A 的左理想.

若规定 a 在 x 上的作用为 xa, 则 A 成为右 A- 模, 称为右正则 A- 模. I 是右正则 A- 模的子模当且仅当 I 是 A 的右理想.

若 A 的单位元 1 可写成 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, 其中 $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$, $1 \leq i, j \leq n$, 则称此分解为 A 的单位元分解.

设 $1 = e_1 + \cdots + e_n$ 是 A 的单位元分解. 则左正则 A- 模有直和分解

$$A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n;$$

(反之, 若左正则 A- 模有直和分解, 则得到 A 的单位元分解.) 同时, 右正则 A- 模也有直和分解

$$A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA.$$

(反之, 若右正则 A- 模有直和分解, 则得到 A 的单位元分解.) 于是得到 F- 向量空间 A 的下述直和分解:

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_iAe_j,$$

并且 $a = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_iae_j$, $\forall a \in A$. 这个分解称为 A 的 Peirce 分解. 注意, 一般来说, 每个分量 e_iAe_j 既非 A 的左理想, 也非 A 的右理

想 (除非 e_i 均是 A 的中心元). 但是上述分解却允许我们将 A 的元素表达成矩阵形式:

$$\forall a \in A, \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij} = e_i a e_j \in e_i A e_j$; 而且 A 中元素的运算可归结为相应矩阵的运算, 例如

$$ab = \sum_{i,k} \sum_{l,j} a_{ik} b_{lj} = \sum_{i,j} \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right).$$

这是因为当 $k \neq l$ 时, $a_{ik} b_{lj} = e_i a (e_k \cdot e_l) b e_j = 0$. 由此可以将 A 写成矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{ij} = e_i A e_j$.

例 2　模 M 称为秩 n 的自由 A- 模, 如果存在 M 中的元素 $m_1, \cdots, m_n$, 使得 M 中任一元 m 可唯一地写成

$$m = a_1 m_1 + \cdots + a_n m_n,$$

其中 $a_i \in A$. 容易证明, M 是秩 n 的自由 A- 模当且仅当存在 A-模同构

$$M \cong nA := A \oplus \cdots \oplus A.$$

任一模 X 均是某一自由模的同态像: 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 X 的一组 F- 基, 令

$$f:\ nA \to X, \quad f((a_1, \cdots, a_n)) = \sum_{1 \le i \le n} a_i x_i.$$

则 f 是满同态.

例 3 模 M 称为循环模, 如果存在 $m \in M$, 使得 $M = Am$.

设 $M = Am$ 是循环模. 则 $f: A \to M$, 其中 $f(a) = am, \forall a \in A$, 是 A- 模同态. 因此 $M \cong A/\mathrm{Ker}f$, 其中 $\mathrm{Ker}f = \{a \in A \mid am = 0\}$.

例 4 设 G 是有限群, (V, ρ) 是 G 的 F- 表示. 对于任一 $\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g \in FG$, 其中 $\lambda_g \in F$, 和任一 $v \in V$, 定义

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) v = \sum_{g \in G} \lambda_g (g \cdot v).$$

则 V 成为群代数 FG 上的左模. 反之, 给定群代数 FG 上的左模 V, 则 G 在 V 上有一 F- 线性作用, 即 V 成为 G 的 F- 表示. 因此, 群 G 的 F- 表示与群代数 FG 上的模是一回事; 群 G 的 F- 表示 M, N 之间的 G- 模映射与 FG- 模 M, N 之间的 FG- 模同态是一回事. 今后我们将反复使用这一观点.

2.8 设 A, B 均是 F- 代数. 若 M 既是左 A- 模, 又是右 B- 模, 且满足

$$(am)b = a(mb), \quad \forall a \in A, b \in B, m \in M,$$

则称 M 是 A-B- 双模, 通常记为 ${}_AM_B$.

例如, 代数 A 既是左正则 A- 模, 又是右正则 A- 模, 并且 A 中乘法的结合律表明 A 是 A-A- 双模.

设 ${}_AM_B$ 是 A-B- 双模, ${}_AN$ 是左 A- 模. 则 $\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, {}_AN)$ 作成左 B- 模: $\forall f \in \mathrm{Hom}_A({}_AM_B, {}_AN)$, $b \in B$, 定义 $(bf)(m) = f(mb)$, $\forall m \in M$. 验证留给读者.

类似地, 读者可以给出 $\mathrm{Hom}_A({}_AN, {}_AM_B)$ 的右 B- 模结构. 若 L 是右 B- 模, 则类似地也可定义 $\mathrm{Hom}_B({}_AM_B, L_B)$ 的右 A- 模结

构和 $\mathrm{Hom}_B(L_B, {}_AM_B)$ 的左 A- 模结构.

特别地，根据上述讨论，对于任一左 A- 模 M, $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ 作成左 A- 模.

2.9　定理　(i) 映射 $f \mapsto f(1)$ 给出了左 A- 模同构：$\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$.

(ii) 若 $M = {}_AA$, 则上述映射给出了 F- 代数同构：$\mathrm{End}_A({}_AA) \cong A^{\mathrm{op}}$. 其中 A^{op} 是 A 的反代数.

证　(i) 映射 $f \mapsto f(1)$ 是 $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ 到 M 的左 A- 模同态：

$$(af)(1) = f(1a) = f(a1) = af(1), \quad \forall a \in A.$$

若 $f(1) = 0$, 则 $f(a) = af(1) = 0$, $\forall a \in A$, 即 $f = 0$. 这表明上述映射是单同态. 对于任一 $m \in M$, 令 $f: A \to M$, 其中 $f(a) = am$, $\forall a \in A$. 则 $f \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ 且 $f(1) = m$. 这表明 $f \mapsto f(1)$ 也是满射，从而是左 A- 模同构映射.

(ii) 对于 $f, g \in \mathrm{End}_A({}_AA)$, $(fg)(1) = f(g(1)) = f(g(1) \cdot 1) = g(1)f(1)$. 这表明 $f \mapsto f(1)$ 是代数 $\mathrm{End}_A({}_AA)$ 到 A 的反代数 A^{op} 的代数同构. □

2.10　设 M 是左 A- 模. 我们考虑 M 的自同态代数 $\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M, M)$.

若 M 有直和分解 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. 令 $e_j: M \to M_j$ 是第 i 次投影映射. 则 e_j 是 M 到 M_j 的左 A- 模同态，当然 e_j 可自然地看成 $\mathrm{End}_A(M)$ 中元，于是得到 $\mathrm{End}_A(M)$ 的单位元分解 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$.

反之，若 $\mathrm{End}_A(M)$ 的单位元有分解 $1 = e_1 + \cdots + e_n$. 令 $M_i = e_i(M)$. 显然 M_i 是左 A- 模且 $M = M_1 + \cdots + M_n$. 若 $e_1(m_1) + \cdots + e_n(m_n) = 0$, 则 $0 = e_i(e_1(m_1) + \cdots + e_n(m_n)) = e_i(m_i)$.

这表明 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

综上所述，我们得到

命题 左 A- 模 M 的直和分解与代数 $\mathrm{End}_A(M)$ 的单位元分解是一一对应的.

称模 M 可分解，如果存在 M 的两个非零子模 M_1 和 M_2 使得 $M = M_1 \oplus M_2$; 否则，称 M 不可分解. 因此，若 M 不可分解且 $M = M_1 \oplus M_2$, 则必推出 $M_1 = \{0\}$ 或 $M_2 = \{0\}$.

推论 1 非零模 M 不可分解当且仅当 $\mathrm{End}_A(M)$ 仅有两个平凡的幂等元 0 和 1.

证 若 e 是 $\mathrm{End}_A(M)$ 非平凡的幂等元，则 $f = 1 - e$ 也是非平凡的幂等元且 $ef = fe = 0$, $1 = e + f$ 是 $\mathrm{End}_A(M)$ 的单位元分解，从而由上述命题得知 M 是可分解的. □

根据 2.7 例 1 中的讨论知代数 $\mathrm{End}_A(M)$ 的单位元分解与左正则 $\mathrm{End}_A(M)$- 模的直和分解是一一对应的，由此也得到

推论 2 左 A- 模 M 的直和分解与代数 $\mathrm{End}_A(M)$ 的左正则模的直和分解是一一对应的.

2.11 设左 A- 模 M 有直和分解 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. 则 $\mathrm{End}_A(M)$ 的单位元 1 有分解 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, 其中 $e_i : M \to M_i$ 是投射. 对于 $f \in \mathrm{End}_A(M)$, 令 $f_{ji} : M_i \to M_j$ 是左 A- 模同态，其中 $f_{ji}(x) = e_j f(x)$, $\forall x \in M_i$.

设 $m = m_1 + \cdots + m_n \in M$, $m_i \in M_i$, $i = 1, \cdots, n$. 则 $f(m) = f(m_1) + \cdots + f(m_n)$. 设 $f(m_i) = m_{i1} + \cdots + m_{in} \in M$, 其中 $m_{ij} \in M_j$, $j = 1, \cdots, n$. 于是

$$f(m) = \sum_{1 \le i,j \le n} m_{ij} = \sum_{1 \le i,j \le n} f_{ji}(m_i).$$

因此，若将 m 写成列向量 $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, 将 f 写成矩阵形式 $f = (f_{ij})_{n\times n}$, 则

$$f(m) = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

这种记号的好处是 $\mathrm{End}_A(M)$ 中元素 f 的加法、乘法和数乘与其相应的矩阵 $(f_{ij})_{n\times n}$ 的加法、乘法和数乘是完全一致的 (请读者自行验证). 于是，我们得到

引理　有 F- 代数同构

$$\begin{aligned} &\mathrm{End}_A(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \middle| f_{ij} \in \mathrm{Hom}_A(M_j, M_i),\quad 1 \le i,\ j \le n \right\}, \end{aligned}$$

其中右边集合的代数运算按矩阵运算法则进行.

特别地，若 $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j) = 0, 1 \le i \ne j \le n$, 则

$$\mathrm{End}_A(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) \cong \mathrm{End}_A(M_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_A(M_n).$$

在上述引理中取 $M_1 \cong \cdots \cong M_n \cong L$, 即 $M \cong nL$, 则得到

2.12　定理　$\mathrm{End}_A(nL) \cong M_n(B)$, 其中 $B = \mathrm{End}_A(L)$, $M_n(B)$ 表示代数 B 上的全矩阵代数.

在本节的最后，我们简单介绍一下范畴与函子的概念.

2.13　定义　一个范畴 C 由下列要素组成:

(i) 一些对象，通常用大写的英文字母表示；对象的全体记为 $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$, 或简记为 $\mathcal{C}$;

(ii) 对于任一对象的有序对 (X,Y) 定义了一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 或简记为 $\mathrm{Hom}(X,Y)$, 其中的元素称为 X 到 Y 的态射;

(iii) 对于任一对象的有序三维组 (X,Y,Z), 定义了集合之间的映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)\\ (f,g) &\longmapsto gf,\end{aligned}$$

满足下述条件:

(i′) 若 $(X,Y)\neq(X',Y')$, 则态射集 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 与 $\mathrm{Hom}(X',Y')$ 的交是空集;

(ii′) (结合律) 若 $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$, $g\in\mathrm{Hom}(Y,Z)$, $h\in\mathrm{Hom}(Z,W)$. 则

$$(hg)f=h(gf);$$

(iii′) (单位元) 对于任一对象 X, 存在唯一的态射 $1_X\in\mathrm{Hom}(X,X)$ 使得 $f1_X=f$ 与 $1_Xg=g$, $\forall f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ 与 $g\in\mathrm{Hom}(Y,X)$.

设 $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$. 若存在 $g\in\mathrm{Hom}(Y,X)$ 使得

$$gf=1_X,\quad fg=1_Y,$$

则称 f 是同构.

2.14 例 1 有限维 F- 空间范畴 F-mod: 对象是所有的有限维 F-向量空间; 对于任意的有限维 F- 向量空间 X,Y, 定义 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 是 X 到 Y 的 F- 线性映射的集合. 则可验证 F-mod 是范畴.

例 2　群范畴 Grp: 对象是所有的群; 对于任意的群 G_1 与 G_2, 定义 $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ 是 G_1 到 G_2 的群同态的集合. 则 Grp 是范畴.

例 3　类似地, 所有的有限维 F- 代数作成一个范畴.

例 4　有限维左 A- 模范畴 A-mod: 设 A 是有限维 F- 代数, A-mod 中的对象为所有的有限维左 A- 模; 对于任意两个有限维 A- 模 X, Y, 定义 X 到 Y 的态射集为 $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$. 则 A-mod 作成范畴. 这是本章中我们研究的对象.

2.15　定义　设 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是两个范畴. 则 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的一个共变 (或反变) 函子 F 由下列要素组成:

(i) F 是 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ 到 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ 的映射, 即 $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ 有 $FX \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$;

(ii) 对于任一对象的有序对 (X, Y), 定义了映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY) \\ f &\longmapsto F(f), \end{aligned}$$

(或相应地,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FY, FX) \\ f &\longmapsto F(f), \end{aligned}$$

)

满足:

(i′) 若 gf 在 $\mathcal{C}$ 中有定义, 则 $F(gf) = F(g)F(f)$ (或相应地, $F(gf) = F(f)F(g)$);

(ii′) $F(1_X) = 1_{FX}$, $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

2.16　例　设 A 是有限维 F- 代数, M 是任一有限维 A- 模. 则 $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ 是 A-mod 到 F-mod 的共变函子, 其中

$$\mathrm{Hom}_A(M, -)(X) := \mathrm{Hom}_A(M, X), \quad \forall X \in A\text{-mod};$$

$\forall f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_A(M,-)(f) := \mathrm{Hom}_A(M,f)$ 定义为如下 F- 线性映射:

$$\mathrm{Hom}_A(M,f)(g) = fg \in \mathrm{Hom}_A(M,Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_A(M,X).$$

而 $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ 是 A-mod 到 F-mod 的反变函子，其中

$$\mathrm{Hom}_A(-,M)(X) := \mathrm{Hom}_A(X,M),\quad \forall X \in A\text{-mod};$$

$\forall f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_A(-,M)(f) := \mathrm{Hom}_A(f,M)$ 定义为如下 F- 线性映射:

$$\mathrm{Hom}_A(f,M)(g) = gf \in \mathrm{Hom}_A(X,M),\quad \forall g \in \mathrm{Hom}_A(Y,M).$$

2.17 设给定左 A- 模和左 A- 模同态的序列:

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n.$$

若 $\mathrm{Ker} f_i = \mathrm{Im} f_{i-1}$, 则称该序列在 M_i 处正合. 若此序列在任一 M_i, $2 \le i \le n-1$, 处均正合, 则称它是 A- 模正合列. 特别地，若

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

是正合列，即 f 单， g 满，且 $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$, 则称它是短正合列.

若 $0 \to M \to 0$ 是正合列，则 $M = 0$.

设 F 是模范畴 A-mod 到模范畴 B-mod 的一个共变函子. F 称为左正合函子，如果对于任一 A-mod 中的正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N,$$

B-mod 中的序列

$$0 \longrightarrow FM \xrightarrow{F(f)} FL \xrightarrow{F(g)} FN$$

也正合．F 称为右正合函子，如果对于任一 A-mod 中的正合列

$$M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

B-mod 中的序列

$$FM \xrightarrow{F(f)} FL \xrightarrow{F(g)} FN \longrightarrow 0$$

也正合．F 称为正合函子，如果对于 A-mod 中的短正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

B-mod 中的序列

$$0 \longrightarrow FM \longrightarrow FL \longrightarrow FN \longrightarrow 0$$

也是短正合列．

根据定义，左正合共变函子 F 将 A- 单同态 $f: M \longrightarrow N$ 变成 B- 单同态 $F(f): F(M) \longrightarrow F(N)$; 右正合共变函子 F 将 A- 满同态 $f: M \longrightarrow N$ 变成 B- 满同态 $F(f): F(M) \longrightarrow F(N)$.

对偶地，设 F 是 A-mod 到 B-mod 的反变函子．F 称为左正合函子，如果对于任一 A-mod 中的正合列

$$M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

B-mod 中的序列

$$0 \longrightarrow FN \xrightarrow{F(g)} FL \xrightarrow{F(f)} FM$$

也是正合列．F 称为右正合函子，如果对于任一 A-mod 中的正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N,$$

B-mod 中的序列

$$FN \xrightarrow{F(g)} FL \xrightarrow{F(f)} FM \longrightarrow 0$$

也是正合列. F 称为正合函子, 如果 F 将 A-mod 中的短正合列变为 B-mod 中的短正合列.

根据定义, 左正合反变函子 F 将 A- 满同态 $f: M \longrightarrow N$ 变成 B- 单同态 $F(f): F(N) \longrightarrow F(M)$; 右正合反变函子 F 将 A- 单同态 $f: M \longrightarrow N$ 变成 B- 满同态 $F(f): F(N) \longrightarrow F(M)$.

2.18 命题 设 M 是任一 A- 模. 则

(i) 函子 $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ 是 A-mod 到 F-mod 的左正合共变函子.

(ii) 函子 $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ 是 A-mod 到 F-mod 的左正合反变函子.

证 只证 (i), 将 (ii) 留作习题.

设 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是任一 A- 模正合列. 这意味着 f 是单 A- 模同态且 $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$. 要证

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,f)} \mathrm{Hom}_A(M,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,g)} \mathrm{Hom}_A(M,Z)$$

是 F-mod 中的正合列, 即 $\mathrm{Hom}_A(M,f)$ 单 F- 线性映射且

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(M,f)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(M,g)).$$

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,X)$, 且 $\mathrm{Hom}_A(M,f)(\varphi) = 0$. 由定义这意味着 $f\varphi = 0$. 但 f 单, 故 $\varphi = 0$. 这表明 $\mathrm{Hom}_A(M,f)$ 单.

设 $\psi \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(M,f))$. 则有 $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,X)$ 使得 $\psi = f\varphi$. 于是

$$\mathrm{Hom}_A(M,g)(\psi) = g\psi = g(f\varphi) = (gf)\varphi = 0,$$

即 $\psi \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(M,g))$.

反之, 设 $\psi \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(M,g))$. 则 $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M,Y)$ 且 $g\psi = 0$, 于是 $g\psi(m) = 0$, $\forall m \in M$. 这表明 $\psi(m) \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$, $\forall m \in M$. 因 f 单, 故对于任一 $m \in M$, 存在唯一的 $x_m \in X$ 使得 $\psi(m) = f(x_m)$. 这就得到了 A- 模同态 $\varphi: M \to X$, $m \mapsto x_m$, 使得

$$\psi(m) = f(\varphi(m)),\quad \forall m \in M.$$

因此 $f\varphi = \psi$, 即 $\psi \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(M,f))$. 从而证得. □

习　题

1. 设 M 是左 A- 模, I 是 A 的左理想. 则 $IM = \{\sum_i x_i m_i \mid x_i \in I, m_i \in M\}$ 是左 A- 模.

2. 任一单 A- 模均是正则 A- 模的商模.

3. 证明左正则 A- 模是单模当且仅当 A 是可除代数.

4. 设 ${}_AM_B$ 是 A-B- 双模, ${}_AN$ 是左 A- 模, L_B 是右 B- 模. 给出 $\mathrm{Hom}_A({}_AN, {}_AM_B)$ 的右 B- 模结构, $\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, L_B)$ 的右 A- 模结构和 $\mathrm{Hom}_B(L_B, {}_AM_B)$ 的左 A- 模结构.

5. 对于右 A- 模写出与定理 2.9 相应的结论, 并证明.

6. 证明存在 F- 代数同构 $\mathrm{End}_A(nA) \cong M_n(A^{\mathrm{op}})$.

7. 设 V 是左 A- 模, $V_n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| v_1, \cdots, v_n \in V \right\}$. 则 V_n 是左 $M_n(A)$- 模且 V_n 是单 $M_n(A)$ 模当且仅当 V 是单 A- 模.

8. 设

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

是 A-mod 中的序列. 若 f 单, g 满, $\mathrm{Im}f \subseteq \mathrm{Ker}g$, 且 $\dim_F L = \dim_F M + \dim_F N$, 则 $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$. 从而 $(*)$ 是短正合列.

9. 设 M 是任一 A- 模, 则反变函子 $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ 是左正合函子.

10. (短五引理) 设有 A- 模同态 f, g, f', g', u, v, w, 使得下图的上下两行均为短正合列且下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & u\downarrow & & v\downarrow & & w\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & L' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

若 u, v, w 中任意两个是同构, 则第三个也是同构.

§3 Jordan-Hölder 定理

本节要证明有限维代数的有限维表示中的两条基本定理.

3.1 设 A 是有限维 F- 代数, M 是有限维 A- 模. M 的子模链

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{l-1} \supset M_l = 0$$

称为 M 的一个合成列, 如果所有商模 M_i/M_{i+1} 均为单 A- 模, $0 \leq i \leq l-1$. 此时, l 称为合成列的长度, M_i/M_{i+1} 称为合成因子.

任一模 M 总有合成列. 事实上, 若 M 单, 则 $M \supset 0$ 是合成列; 若 M 非单, 则 M 有极大子模 M_1 (即不存在子模 X 使得 $M \underset{\neq}{\supset} X \underset{\neq}{\supset} M_1$. 因 $\dim_F M < +\infty$, 故 M_1 总存在). 若 M_1 单, 则 $M \supset M_1 \supset 0$ 是合成列; 若 M_1 非单, 则重复上述过程. 因 M 有限维, 故最后总得到 M 的一个合成列.

若 $M/N \cong L$, 则称 M 是 N 借助 L 的扩张. M 有合成列这一事实说明 M 可通过借助单模的反复扩张得到.

M 的合成列一般来说不唯一. 但下述定理表明对于任一单模 S, M 的合成列中与 S 同构的合成因子的个数是不依赖于合成列选取的 M 的内蕴量.

3.2　定理 (Jordan-Hölder)　设 M 是任一 A- 模, 且

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s = 0$$

和

$$M = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_t = 0$$

是 M 的两个合成列. 则 $s = t$, 并且存在 $\{1, \cdots, s\}$ 的一个置换 π 使得

$$N_i/N_{i+1} \;\cong\; M_{\pi(i)}/M_{\pi(i)+1}, \quad 0 \le i \le s-1.$$

证　对 s 用归纳法. 结论对单 A- 模成立. 假设定理对于具有长为 $s-1$ 的合成列的模成立. 设 M 具有长为 s 的合成列, 形如题设.

若 $M_1 = N_1$. 则 $M_0/M_1 = N_0/N_1$, 结论由归纳假设即得.

设 $M_1 \ne N_1$. 则 $M_1 + N_1 \ne M_1$. 因 M_1 是 M 的极大子模, 故 $M_1 + N_1 = M$. 从而有 A- 模同构 (引理 2.2(ii))

$$N_1/(M_1 \cap N_1) \cong M/M_1;$$

$$M_1/(M_1 \cap N_1) \cong M/N_1.$$

取定 $M_1 \cap N_1$ 的一个合成列 $M_1 \cap N_1 = L_2 \supset L_3 \supset \cdots \supset L_k = 0$. 则

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_s = 0$$

与

$$M_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_k = 0$$

均为 M_1 的合成列，由归纳假设知它们等价，即 $s=k$，且这两个合成列的合成因子之间存在一一对应，使得相对应的合成因子同构．又因为

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_t = 0$$

与

$$N_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_s = 0$$

均为 N_1 的合成列，由归纳假设知它们等价，即 $s=t$，且这两个合成列的合成因子之间存在一一对应．

现在考虑 M 的合成列

$$M \supset M_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_s = 0$$

与

$$M \supset N_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_s = 0.$$

两者的合成因子从第三个开始全部相同，而

$$M/M_1 \cong N_1/L_2,$$
$$M_1/L_2 \cong M/N_1,$$

因此这两个合成列等价．

由此看出，合成列 $M \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s = 0$ 等价于 $M \supset M_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_s = 0$，又等价于 $M \supset N_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_s = 0$，从而等价于 $M \supset N_1 \supset \cdots \supset N_s = 0$. □

注 将单模 S 出现在 M 的合成因子中的次数记为 d_S，因此得到 M 的维数向量 $(d_S)_S$．这是模的一个重要同构不变量．维数向量相同的两个模何时同构是代数表示论中有趣的问题．

3.3 定理 设 A 是有限维代数．则任一单 A-模 S 均同构于正则模 A 的某一合成因子．

特别地，仅有有限个单 A- 模的同构类.

证　取左正则 A- 模 $_AA$ 的一个合成列 $A = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_t = (0)$. 则有 A- 模的短正合列

$$
\begin{aligned}
&0 \to M_1 \to A \to A/M_1 \to 0,\\
&0 \to M_2 \to M_1 \to M_1/M_2 \to 0,\\
&\cdots,\\
&0 \to M_{t-1} \to M_{t-2} \to M_{t-2}/M_{t-1} \to 0.
\end{aligned}
$$

利用左正合函子 $\mathrm{Hom}_A(-,S)$ (参见习题 2.10), 我们得到 F- 模正合列

$$
\begin{aligned}
&0 \to \mathrm{Hom}_A(A/M_1,S) \to \mathrm{Hom}_A(A,S) \to \mathrm{Hom}_A(M_1,S),\\
&0 \to \mathrm{Hom}_A(M_1/M_2,S) \to \mathrm{Hom}_A(M_1,S) \to \mathrm{Hom}_A(M_2,S),\\
&\cdots,\\
&0 \to \mathrm{Hom}_A(M_{t-2}/M_{t-1},S) \to \mathrm{Hom}_A(M_{t-2},S)\\
&\quad \to \mathrm{Hom}_A(M_{t-1},S).
\end{aligned}
$$

因为 $\mathrm{Hom}_A(A,S) \cong S \neq 0$, 由上述正合列可推出存在 $0 \leq i \leq t-1$, 使得 $\mathrm{Hom}_A(M_i/M_{i+1},S) \neq 0$. 于是，由 Schur 引理知 $S \cong M_i/M_{i+1}$. □

习　题

1. 利用 Jordan-Hölder 定理证明：若 S 是半单 A- 模，M 是任一 A- 模，且 $nM \cong nS, n$ 是正整数，则 $M \cong S$.

2. 设 M 是任一 A- 模，S 是任一单 A- 模，且 $\mathrm{Hom}_A(M,S) \neq 0$. 则 S 是 M 的一个合成因子.

§4 Wedderburn-Artin 定理

4.1 定义 设 A 是有限维 F- 代数. 如果左正则 A- 模 $_AA$ 是半单模, 即 $_AA$ 是其单子模的直和, 则称 A 是半单代数.

A 的非零左理想 I 称为极小左理想, 如果 I 不再真包含 A 的非零左理想. 由定义知左正则 A- 模 $_AA$ 的单子模恰是 A 的极小左理想. 故 A 是半单代数当且仅当 A 是其极小左理想的直和. 由 2.5 引理 1 知 A 是半单代数当且仅当 A 是其极小左理想的和.

例如, 可除代数 A 是半单代数, 因为 A 本身是 A 的极小左理想.

若 G 是有限群, F 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 则由 Maschke 定理知群代数 FG 上任一左模均是半单模, 特别地, 左正则 FG-模是半单模. 于是, 可以将定理 I.5.3 重新叙述如下:

4.2 定理 有限群代数 FG 是半单代数当且仅当 $\mathrm{char}F \nmid |G|$.

4.3 定理 单代数是半单代数.

证 设 A 是单代数. 令 M 是 A 的所有极小左理想的和. 只要证明 $M = A$. 为此, 设 S 是 A 的任一极小左理想. 对于 $a \in A$, 映射 $s \longmapsto sa$, $\forall s \in S$, 是单 A- 模 S 到模 Sa 的满同态, 因此 $Sa = 0$ 或者 Sa 也是单 A- 模, 从而 $Sa \subseteq M$. 这表明 $Ma \subseteq M$, 即 M 也是 A 的右理想, 从而 M 是 A 的非零理想. 再由 A 的单性即知 $M = A$. □

4.4 定理 设 D 是可除 F- 代数, $M_n(D)$ 是 D 上 n 阶全矩阵代数, $(M_n(D))^{\mathrm{op}}$ 是其反代数. 则有 F- 代数同构 $(M_n(D))^{\mathrm{op}} \cong M_n(D^{\mathrm{op}})$, 其中 D^{op} 是 D 的反代数.

证 令 $\pi: (M_n(D))^{\mathrm{op}} \to M_n(D^{\mathrm{op}})$ 将 D 上 n 阶矩阵 X 送到 X 的转置 X^{T}. 则 π 是 F- 线性映射. 设 $X = (x_{ij})$ 和 $Y = (y_{ij})$ 均

是 n 阶矩阵. 分别用 $X\circ Y$ 和 $X*Y$ 表示 $(M_n(D))^{\mathrm{op}}$ 和 $M_n(D^{\mathrm{op}})$ 中的乘法. 设 $x,y\in D$. 用 $x\circ y$ 表示 D^{op} 中的乘法. 则

$$\begin{aligned}(\pi(X\circ Y))_{ij}&=(\pi(YX))_{ij}=((YX)^{\mathrm{T}})_{ij}\\&=(YX)_{ji}=\sum_{k=1}^{n}y_{jk}x_{ki}\\&=\sum_{k=1}^{n}x_{ki}\circ y_{jk}\\&=(X^{\mathrm{T}}*Y^{\mathrm{T}})_{ij}\\&=(\pi(X)*\pi(Y))_{ij},\end{aligned}$$

即 $\pi(X\circ Y)=\pi(X)*\pi(Y)$. 从而 π 是 F- 代数同构. □

(注意: 若 D 不可换, 则在 $M_n(D)$ 中 $(YX)^{\mathrm{T}}$ 未必等于 $X^{\mathrm{T}}\cdot Y^{\mathrm{T}}$.)

下述定理是 Wedderburn-Artin 关于半单代数结构的主要结果.

4.5　定理(Wedderburn-Artin)　下述命题等价:

(i) A 是半单 F- 代数.

(ii) 任一左 A- 模均是半单模.

(iii) A 同构于可除 F- 代数上全矩阵代数的直积.

特别地, 若 F 是代数闭域, A 同构于 F 上全矩阵代数的直积.

(iv) A 同构于单代数的直积.

证　(i) $\Rightarrow$ (ii): 设 A 是半单代数, M 是任一左 A- 模. 设 $m_1,\cdots,m_n$ 是 M 的一组 F- 基. 则 $M=Am_1+\cdots+Am_n$. 考虑映射 $f_i: A\to Am_i$, 其中 $f_i(a)=am_i$, $\forall a\in A$. 则 f_i 是左 A- 模满同态, 即 Am_i 是半单模 ${}_AA$ 的商模, 故由 2.5 引理 2 知 Am_i 也是半单模, 从而 M 是半单模.

(ii) ⇒ (iii): 设任一左 A- 模均是半单模. 则左正则模 ${}_AA$ 是半单模. 故 $A = n_1S_1 \oplus \cdots \oplus n_tS_t$, 其中 $S_1, \cdots, S_t$ 是 ${}_AA$ 的互不同构的单子模. 令 $n_iS_i = L_i$. 则由引理 2.4 和 Schur 引理知

$$\mathrm{Hom}_A(L_i, L_j) \cong n_in_j\mathrm{Hom}_A(S_i, S_j) = 0, \ i \neq j.$$

再由定理 2.12 知

$$\mathrm{End}_A(L_i) = \mathrm{End}_A(n_iS_i) \cong M_{n_i}(D_i),$$

其中 $D_i = \mathrm{End}_A(S_i)$ 是 F- 上可除代数.

由定理 2.9 、引理 2.11 和引理 4.4, 有

$$\begin{aligned}
A &\cong (\mathrm{End}_A(A))^{\mathrm{op}} = (\mathrm{End}_A(L_1 \oplus \cdots \oplus L_t))^{\mathrm{op}} \\
&\cong (\mathrm{End}_A(L_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_A(L_t))^{\mathrm{op}} \\
&\cong (M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_t}(D_t))^{\mathrm{op}} \\
&\cong (M_{n_1}(D_1))^{\mathrm{op}} \times \cdots \times (M_{n_t}(D_t))^{\mathrm{op}} \\
&\cong M_{n_1}(D_1^{\mathrm{op}}) \times \cdots \times M_{n_t}(D_t^{\mathrm{op}}).
\end{aligned}$$

因为 D_i 是可除代数, 故 D_i^{op} 也是可除代数, 从而 A 同构于可除代数上全矩阵代数的直积.

(iii) ⇒ (iv): 显然, 因为可除代数上的全矩阵代数是单代数.

(iv) ⇒ (i): 设 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, A_i 均为单代数. 注意到每个直积因子 A_i 上的模 M 均可自然地视为 A- 模: $\forall a = (a_1, \cdots, a_n) \in A$, 其中 $a_i \in A_i$, 且

$$a \cdot m := a_im, \quad \forall m \in M;$$

并且 M 作为 A_i- 模是单模当且仅当它作为 A- 模是单模. 由定理 4.3 知每个 A_i 均是单 A_i- 模的和, 从而是单 A- 模的和; 而左正则

A- 模是左 A- 模 A_i 的和，因此 $_AA$ 是单 A- 模的和，即 A 是半单代数. □

4.6　推论　A 是单代数当且仅当 A 同构于可除代数上的某一全矩阵代数.

特别地，若 F 是代数闭域，则 A 是单代数当且仅当 A 同构于 F 上的某一全矩阵代数.

证　设 A 是单代数. 由定理 4.3 知 A 是半单代数. 从而由定理4.5 知 $A \cong M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_t}(D_t)$, 其中 D_i 均为可除代数. 因为每个直积因子 $M_{n_i}(D_i)$ 均为 A 的理想，由 A 的单性即知 $t=1$. □

4.7　设 A 是半单代数. 根据定理 4.5, 任一左 A- 模均是半单模，因此 A- 模的研究归结为单 A- 模的研究. 我们自然地希望知道 A 有多少个互不同构的单模以及每个单模的构造. 下述定理完全回答了这个问题.

定理　(i) 设 $A = A_1\times\cdots\times A_n$ 是半单代数，其中每个 A_i 均为单代数，S 是任一单 A- 模. 则存在唯一的 A_i 使得 S 是单 A_i-模且 $A_jS=\{0\}$, $\forall j\neq i$. 称 A_i 为 S 相应的单因子.

从而，半单代数上单模是其某一个单因子上的单模.

(ii) 设 D 是有限维可除 F- 代数. 则 $A=M_n(D)$ 在同构意义下仅有一个单模 V; 正则 A- 模同构于 nV 且 $\dim_F V = n[D:F]$; $\mathrm{End}_A(V)\cong D^{\mathrm{op}}$.

(iii) 设 D 是有限维可除 F- 代数，$A=M_n(D)$, (V,ρ) 是其在同构意义下仅有的一个不可约表示，其中 $\rho:\ A\longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ 是相应的代数同态. 则

$$\rho(A)\cong M_n(D).$$

特别地，若 $\mathrm{Hom}_A(V,V)\cong F$，则 $\rho(A)=M_n(F)$. 此时 $\dim_F V=n$; 并且存在 V 的一组 F- 基 B 使得 $\rho(a)$ 在 B 下的矩阵就是 $\rho(a)$, $\forall a\in A$.

(iv) 设 M,N 均为单代数上的模. 则 $M\cong N$ 当且仅当 $\dim_F M=\dim_F N$.

证 (i) 设 e_i 是 A_i 的单位元，$i=1,\cdots,n$. 则 A 有单位元的中心分解 $1=e_1+\cdots+e_n$，即 $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$，且 e_i 均属于 A 的中心. 从而 $S=e_1S+\cdots+e_nS$. 因为 e_j 在 A 的中心里，故 e_jS 均是左 A- 模，且 $s\longmapsto e_js$, $\forall s\in S$, 是 S 到 e_jS 的左 A- 模满同态，由 S 的单性即知 $e_jS=0$ 或者 $e_jS=S$.

设 $e_iS=S$. 则对于任一 $j\neq i$, $e_jS=e_j(e_iS)=(e_je_i)S=0$. 于是

$$A_iS=(Ae_i)S=A(e_iS)=AS=S,$$

且

$$A_jS=(Ae_j)S=(Ae_j)(e_iS)=A(e_je_iS)=0,\quad j\neq i,$$

从而 S 也是单 A_i- 模.

(ii) 令

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\middle|\, x_1,\cdots,x_n\in D\right\}.$$

因为 $D\supseteq F$, 故 V 对于列向量的加法和数乘作成 $n[D:F]$ 维 F- 向量空间；$A=M_n(D)$ 在 V 上的作用按矩阵的乘法法则，则 V 作成左 $M_n(D)$- 模. 注意，n 个单位列向量仅是 V 的一组 D- 基，但一般来说不再是 V 的一组 F- 基. 因此，对于 $a\in A=M_n(D)$, a 作为 V 的 F- 线性变换一般来说不再是 a 本身 (除非 $D=F$).

设 U 是 V 的非零子模. 取 $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in U$, 其中某一 $a_j \neq 0$. 则

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 a_j^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n a_j^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U,$$

即 $U = V$, 故 V 是单 $M_n(D)$- 模.

令

$$I_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(D) \;\middle|\; x_1, \cdots, x_n \in D \right\}.$$

则 I_i 是 $M_n(D)$ 的左理想, 且显而易见作为左 $M_n(D)$- 模 $I_i \cong V$, $i = 1, \cdots, n$. 于是有 $M_n(D)$- 模同构

$$M_n(D) = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n \cong nV.$$

设 S 是任一单 A- 模. 则

$$0 \neq S \cong \mathrm{Hom}_A(A, S) \cong \mathrm{Hom}_A(nV, S) \cong n\mathrm{Hom}_A(V, S);$$

从而 $\mathrm{Hom}_A(V,S) \neq 0$. 由 Schur 引理即知 $S \cong V$. 这表明 V 是 A 的唯一单模.

设 $f \in \mathrm{End}_A(V)$. 注意到 $V = A\alpha$, α 可取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

令 $f(\alpha)=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, e_{ij} 是 (i,j) 处为 1, 其余全为 0 的 n 阶矩阵. 则由

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=f(\alpha)=f(e_{11}\alpha)=e_{11}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

推出 $a_2=\cdots=a_n=0$. 从而对于任一 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in V$, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f((e_{11}x_1+\cdots+e_{n1}x_n)\alpha)\\&=(e_{11}x_1+\cdots+e_{n1}x_n)\begin{pmatrix}a_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_1a_1\\ \vdots\\ x_na_1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\cdot a_1.\end{aligned}$$

由此可见, $f\mapsto a_1$ 给出了 F- 代数同构: $\mathrm{End}_A(V)\cong D^{\mathrm{op}}$.

(iii) 将上段证明中的单 A- 模 V 视为 A 的不可约 F- 表示, 于是得到代数映射 $\rho:\ A\to\mathrm{End}_F(V)$. 由模 ${}_AV$ 的构造知

$$\mathrm{Ker}\rho=\{\ a\in A\mid aV=0\ \}=0.$$

因此

$$\rho(A) \cong A/\mathrm{Ker}\rho = A = M_n(D).$$

设 $\mathrm{Hom}_A(V,V) \cong F$. 因 $\mathrm{Hom}_A(V,V) \cong D^{\mathrm{op}}$ 且 $D \supseteq F$, 故 $D = F$, $A = M_n(F)$. 从而由 A- 模 V 的构造知 $\rho(A) = M_n(F)$, 且对任一 $a \in A$, $\rho(a)$ 在 V 的 n 个单位列向量作成的基下的矩阵就是 $\rho(a)$.

(iv) 设 M,N 均是 $M_n(D)$ 上的模. 则 M,N 均是半单模. 由 (ii) 知

$$M \cong m_1 V, \quad N \cong m_2 V.$$

从而若 $\dim_F M = \dim_F N$, 即 $m_1 n \dim_F D = m_2 n \dim_F D$, 则 $m_1 = n_1$, 从而 $M \cong N$. □

4.8 推论 设 $A \cong A_1 \times \cdots \times A_n$ 是半单 F- 代数, 其中每个 A_i 均为单代数. 则恰有 n 个互不同构的单 A- 模.

进一步地, 若 $\mathrm{Hom}_A(V,V) \cong F$, 其中 V 是任一单 A- 模, 则单 A- 模的个数为 $\dim_F Z(A)$.

证 由推论 4.6 和定理 4.7(ii) 知 A_i 有唯一的单模 V_i, 它们按 $A_j V_i = \{0\}$, $j \neq i$, 的方式自然地作成单 A- 模, 由此得到 A 的 n 个互不同构的单模. 再由定理 4.7(i) 知这是全部的单 A- 模.

注意到 $Z(A) \cong Z(A_1) \times \cdots \times Z(A_n)$. 由推论 4.6 和定理 4.7(ii) 知

$$A_i \cong M_{n_i}(D_i), \quad D_i \cong (\mathrm{End}_{A_i}(V_i))^{\mathrm{op}}.$$

由假设知

$$D_i \cong (\mathrm{End}_{A_i}(V_i))^{\mathrm{op}} = (\mathrm{End}_A(V_i))^{\mathrm{op}} \cong F.$$

因此

$$\begin{aligned}\dim_F Z(A) &= \sum_{i=1}^{n} \dim_F Z(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \dim_F Z(M_{n_i}(F)) = n.\end{aligned}$$ □

4.9 完全类似于定理 4.5 的证明，我们可以得到右正则模 A_A 是半单模当且仅当 A 同构于单代数的直积，从而由定理 4.5 知 A_A 是半单模当且仅当 ${}_AA$ 是半单模. 这说明半单代数是左右"对称"的.

4.10 Wedderburn-Artin 定理将半单代数 A 归结为可除代数 $D_1, \cdots, D_t$ 和正整数 $n_1, \cdots, n_t$，即 $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_t}(D_t)$. 自然的问题是 D_i 与 n_i 是否由 A 唯一确定？下述定理给出了肯定的回答，从而将半单 F- 代数的分类归结为有限维可除 F- 代数的分类.

定理 若 $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_t}(D_t) \cong M_{m_1}(K_1) \times \cdots \times M_{m_s}(K_s)$, 其中 $D_1, \cdots, D_t$, $K_1, \cdots, K_s$ 均是可除 F- 代数, 则 $t = s$, 且存在 $\{1, \cdots, s\}$ 的置换 π 使得 $n_i = m_{\pi(i)}$, $D_i \cong K_{\pi(i)}$.

证 设 e_i 是 $M_{n_i}(D_i)$ 的单位元，$i = 1, \cdots, t$; f_j 是 $M_{m_j}(K_j)$ 的单位元，$j = 1, \cdots, s$. 则有 A 的单位元的中心分解

$$1 = e_1 + \cdots + e_t = f_1 + \cdots + f_s.$$

因为 e_i, f_j 均属于 A 的中心，故 $e_i f_j$ 与 $e_i - e_i f_j$ 均是 $M_{n_i}(D_i)$ 的幂等元，且 $e_i f_j(e_i - e_i f_j) = (e_i - e_i f_j) e_i f_j = 0$. 于是得到 $M_{n_i}(D_i)$ 的单位元 e_i 的中心分解 $e_i = e_i f_j + (e_i - e_i f_j)$. 从而由定理 1.4 知 $M_{n_i}(D_i)$ 有直积分解，但 $M_{n_i}(D_i)$ 是单代数，故 $e_i f_j = 0$ 或 $e_i f_j = e_i$. 类似地，$e_i f_j = 0$ 或 $e_i f_j = f_j$.

因为 $e_i = e_i(f_1 + \cdots + f_s)$, 故存在 f_j 使得 $e_if_j \neq 0$. 从而 $e_i = e_if_j = f_j$; 若 $l \neq j$, 则 $e_if_l = 0$, 这是因为 $e_if_l = f_jf_l = 0$. 这表明对于任一 i, 存在唯一的 j, 使得 $e_i = f_j$. 于是 $t \leq s$.

同样的讨论可知 $s \leq t$, 从而 $t = s$. 于是存在 $\{1, \cdots, s\}$ 的置换 π 使得 $e_i = f_{\pi(i)}$. 从而 $M_{n_i}(D_i) \cong Ae_i = Af_{\pi(i)} \cong M_{m_{\pi(i)}}(K_{\pi(i)})$.

余下要证: 若 $A \cong M_n(D) \cong M_m(K)$, D 与 K 均为 F- 可除代数, 则 $n = m$ 且 $D \cong K$.

根据定理 4.7(ii) 知 $A \cong nV \cong mV$, 其中 V 是 A 唯一的单模, 从而 $n = m$. 而且 $D \cong (\mathrm{End}_A(V))^{\mathrm{op}} \cong K$. □

最后, 将本节的结果应用于有限群的群代数, 我们重新得到定理 II.3.2.

4.11　定理　设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 则有限群代数 FG 的互不同构的单模个数 $\leq s$, 其中 s 是 G 的共轭类的个数; 且若 F 是 G 的分裂域, 则 FG 恰有 s 个互不同构的单模.

证　由推论 4.8 知 FG 恰有 n 个互不同构的单模, 其中 n 是半单代数 FG 的单因子的个数, 因此 $n \leq \dim_F Z(FG)$, 且若 F 是 G 的分裂域, 则等号成立; 而由 1.3 例 3 知 $\dim_F Z(FG)$ 恰是 G 的共轭类的个数. □

4.12　设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 且 F 是 G 的分裂域. 则由定理 1.2 、定理 4.5 和定理 4.7(ii) 知

$$FG = M_{n_1}(F) \times \cdots \times M_{n_s}(F),$$

其中 s 恰为 G 的共轭类的个数. 令 e_i 是 $M_{n_i}(F)$ 的单位元. 则得到 FG 的中心 $Z(FG)$ 的两组基 $\{c_1, \cdots, c_s\}$ 和 $\{e_1, \cdots, e_s\}$, 其中 c_i 是 G 的共轭类 C_i 的类和. 这两组基各有优点: $c_1, \cdots, c_s$ 有明显的群论意义, 而 $e_1, \cdots, e_s$ 是正交基, 即 $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$.

令

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix}.$$

则 $A=(a_{ij})_{s\times s}$ 和 $B=(b_{ij})_{s\times s}$ 是 F 上互逆的 s 阶矩阵. 下面的命题给出了 A、B 与 G 的特征标表的关系.

命题 设 $h_i=|C_i|$. 则

$$a_{ij}=\frac{h_i}{n_j}\chi_j(g_i),\quad b_{ij}=\frac{n_i}{|G|}\chi_i(g_j^{-1}),$$

其中 χ_i 是单因子 $M_{n_i}(F)$ 上的单模 V_i (自然地视为 FG- 模) 的特征标, g_i 是 C_i 中任一元.

证 若 $j\neq k$, 注意到 $M_{n_j}(F)$ 在 V_k 上的作用为零, 而 e_j 在 V_j 上的作用是恒等作用. 因此

$$\chi_j(e_k):=\operatorname{tr}(e_k)=\begin{cases} n_j, & k=j, \\ 0, & k\neq j. \end{cases}$$

从而

$$\chi_j(c_i)=\chi_j\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}e_k\right)=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\chi_j(e_k)=a_{ij}n_j;$$

另一方面, $\chi_j(c_i)=h_i\chi_j(g_i)$. 又因为 $\operatorname{char}F\nmid n_j$ (引理 II.3.3.A), 由此即得 $a_{ij}=\frac{h_i}{n_j}\chi_j(g_i)$.

再由 $\chi\mathrm{reg}(g)=\begin{cases} |G|, & g=1, \\ 0, & g\neq 1 \end{cases}$ 知, 若 $g^{-1}\notin C_k$, 则 $\chi\mathrm{reg}(c_kg)=0$; 若 $g^{-1}\in C_k$, 则 $\chi\mathrm{reg}(c_kg)=\chi\mathrm{reg}(1)=|G|$. 于是, 由

$\chi_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i$ 即得

$$\begin{aligned}\chi_{\text{reg}}(e_ig_j^{-1}) &= \chi_{\text{reg}}\left(\sum_{k=1}^{s} b_{ik}c_kg_j^{-1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{s} b_{ik}\chi_{\text{reg}}(c_kg_j^{-1})\\ &= |G|b_{ij};\end{aligned}$$

另一方面,因 $e_ig_j^{-1} \in M_{n_i}(F)$, $M_{n_i}(F)V_k = 0\ (i \neq k)$, 故 $\chi_k(e_ig_j^{-1}) = 0\ (k \neq i)$, 而 $(e_ig_j^{-1})V_i = g_j^{-1}(e_iV_i) = g_j^{-1}\cdot V_i$, 即 $\chi_i(e_ig_j^{-1}) = \chi_i(g_j^{-1})$. 于是

$$\chi_{\text{reg}}(e_ig_j^{-1}) = \sum_{k=1}^{s} n_k\chi_k(e_ig_j^{-1}) = n_i\chi_i(e_ig_j^{-1}) = n_i\chi_i(g_j^{-1}),$$

从而得到 $b_{ij} = \frac{n_i}{|G|}\chi_i(g_j^{-1})$. □

4.13　考虑 $Z(FG)$ 关于基 $\{c_1,\cdots,c_s\}$ 的结构常数 $\{c_{ijk}\}$, 即

$$c_ic_j = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}c_k,\quad 1 \leq i,j \leq s.$$

下述公式表明结构常数可由 G 的特征标表确定.

命题　$c_{ijk} = \frac{h_ih_j}{|G|}\sum_{t=1}^{s}\frac{\chi_t(g_i)\chi_t(g_j)\chi_t(g_k^{-1})}{\chi_t(1)}$.

证　由上述命题知, 对于 $1 \leq i,j,t \leq s$, 有

$$c_i = \sum_{t=1}^{s}\frac{h_i}{n_t}\chi_t(g_i)e_t,$$

$$e_t = \sum_{k=1}^{s}\frac{n_t}{|G|}\chi_t(g_k^{-1})c_k.$$

故由 $e_l e_t = \delta_{lt} e_t$ 知

$$
\begin{aligned}
c_i c_j &= \sum_{t,l} \frac{h_i h_j}{n_t n_l} \chi_t(g_i) \chi_l(g_j) e_t e_l \\
&= \sum_{t=1}^{s} \frac{h_i h_j}{n_t^2} \chi_t(g_i) \chi_t(g_j) e_t \\
&= \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{t=1}^{s} \frac{h_i h_j}{|G|} \frac{\chi_t(g_i) \chi_t(g_j) \chi_t(g_k^{-1})}{n_t} \right) c_k.
\end{aligned}
$$

比较 c_k 的系数即得到所要证的公式. □

在 II.4.3 中我们已看到特征标表相同的两个群未必同构，但有如下结果.

4.14 推论 设有限群 G_1 与 G_2 的特征标表相同. 则 $Z(G_1) \cong Z(G_2)$.

证 由于 $|Z(G_i)|$ 恰是 G_i 的阶为 1 的共轭类的个数，而共轭类的阶已包含在特征标表中 (参见习题 II.5.1). 因此 $|Z(G_1)| = |Z(G_2)|$.

对于 $Z(G_i)$ 中任一元 g, 相应的类和即为 g 本身. 从而 $Z(G_i)$ 的乘法表由命题 4.13 中公式确定 (此公式只与 G_i 的特征标表有关). 于是 $Z(G_1)$ 与 $Z(G_2)$ 的乘法表相同，即 $Z(G_1) \cong Z(G_2)$. □

习　题

1. 证明代数闭域上交换代数的单模必是 1 维的.

2. 证明 F- 代数 A 是交换半单代数当且仅当 $A \cong K_1 \times \cdots \times K_s$, 其中 K_i 均是 F 的扩域.

3. 设 H, K 均为有限 Abel 群, $\mathrm{char} F \nmid |H|$, $\mathrm{char} F \nmid |K|$, 且 F 是代数闭域. 则 FH 与 FK 作为 F- 代数是同构的当且仅当 $|H| = |K|$.

4. 设 $A = A_1 \times \cdots \times A_s$, A_i 均为单代数，M 是左 A- 模，$1 = e_1 + \cdots + e_s$ 是相应的单位元的中心分解. 证明：$M = \bigoplus_{i=1}^{s} e_i M$，且 $e_i M$ 是左 A_i- 模.

5. 设 $A = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_s}(D_s)$. 则正则 A- 模有不可约分解

$$A \cong n_1(V_1, \rho_1) \oplus \cdots \oplus n_s(V_s, \rho_s),$$

其中 $V_1, \cdots, V_s$ 是全体互不同构的单 A- 模，使得

$$\operatorname{ann}(V_i) = \prod_{j \neq i} M_{n_j}(D_j);$$

$$\operatorname{End}_A(V_i) \cong D^{\mathrm{op}};$$

$$\rho_i(A) \cong M_{n_i}(D_i).$$

6. 设 M 是半单代数 A 上的模. 则自同态代数 $\operatorname{End}_A(M)$ 也是半单代数. [提示：利用引理 2.11 和定理 2.12.]

7. 半单代数的商代数是半单代数. [提示：利用定理 1.5 和 Wedderburn-Artin 定理.]

8. 设 $\operatorname{char}F \nmid |G|$ 且 F 是 G 的分裂域. 设 c_i 是 G 中元 g 所属的共轭类 C_i 的类和，V 是单 FG- 模，χ 是其特征标. 则 c_i 在 V 上的作用是倍乘 $\dfrac{|C_i|\chi(g)}{\dim_F V} 1_V$.

§5　代数与模的 Jacobson 根

在上一节我们已看到，半单代数无论其结构还是表示理论都极其简洁优美. 如何度量任一 F- 代数离半单代数有 “多远”？怎样利用半单代数去研究任一代数？代数与模的 Jacobson 根提供了这样的概念与方法.

5.1 设 A 是任一有限维 F- 代数, I, J 是 A 的理想. 回顾

$$IJ = \left\{ \sum ab \mid a \in I, b \in J \right\}.$$

则 IJ 是 A 的理想. 若存在正整数 n 使得 $I^n = \{0\}$, 则称 I 是 A 的幂零理想. 类似地定义幂零左 (右) 理想.

引理 存在 A 的最大幂零理想 R, 即 R 是幂零理想且包含 A 的任一幂零理想.

证 令 R 是 A 的所有幂零理想之和. 因为 A 是有限维, 故存在有限个幂零理想 $I_1, \cdots, I_m$, 使得 $R = I_1 + \cdots + I_m$. 从而只要证明两个幂零理想之和仍是幂零理想.

事实上, 设 $I_1^q = 0, I_2^r = 0$. 则 $(I_1 + I_2)^{q+r}$ 是形如 $x_1 \cdots x_{q+r}$ 的元素的有限和. 注意到 $x_1, \cdots, x_{q+r}$ 中至少有 q 个因子属于 I_1, 或者至少有 r 个因子属于 I_2, 从而 $x_1 \cdots x_{q+r} \in I_1^q \cup I_2^r = 0$, 即 $I_1 + I_2$ 也幂零. □

5.2 定义 A 的最大幂零理想称为 A 的 Jacobson 根, 记为 $\mathrm{rad}(A)$.

$\mathrm{rad}(A)$ 也是 A 的最大幂零左 (右) 理想. 事实上, 若 L 是 A 的幂零左理想, 则 LA 是 A 的理想并且幂零, 从而 $L \subseteq LA \subseteq \mathrm{rad}\,(A)$.

下述定理给出了半单代数的另一刻画.

5.3 定理 设 A 是有限维 F- 代数. 则 A 是半单代数当且仅当 $\mathrm{rad}(A) = 0$.

证 设 A 是半单代数. 则 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, A_i 均为单代数. 设 $0 \neq I$ 是 A 的任一理想. 则由定理 1.5 知 I 是某些 A_i 的直积. 从而 $I^{\mathrm{T}} = I \neq 0$. 即 A 无非零的幂零理想, 从而 $\mathrm{rad}(A) = 0$.

反之, 设 $\mathrm{rad}(A) = 0$. 欲证 A 半单, 只要证 A 的任一极小左理想 I 均有补左理想, 即 ${}_AA$ 的任一单子模 I 均有补子模.

事实上, 由 $\mathrm{rad}(A) = 0$ 知 $I^2 \neq 0$, 故 $I^2 = I$, 从而存在 $y \in I$ 使

得 $Iy \neq 0$. 于是 $Iy = I$. 故存在 $0 \neq e \in I$ 使得 $ey = y, (e^2 - e)y = 0$. 令 $J = \{a \in I \mid ay = 0\}$. 则 J 是 A 的左理想且 $J \subseteq I, J \neq I$, 故 $J = 0$. 于是 $e^2 = e$, 由此即知 $I = Ae$. 从而 $A = Ae \oplus A(1-e) = I \oplus A(1-e)$, 即 I 有补子模 $A(1-e)$. □

5.4　推论　设 A 是任一有限维 F- 代数. 则

(i) $A/\mathrm{rad}(A)$ 是半单代数.

(ii) 若 A/I 是半单代数, 则 $\mathrm{rad}(A) \subseteq I$.

证　(i) 设 $J = \mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}(A))$. 令 $J = I/\mathrm{rad}(A)$. 因 $J^m = 0$, $m \geq 1$, 故 $I^m \subseteq \mathrm{rad}(A)$. 从而 I 也幂零, 于是 $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$, 即 $J = 0$. 再由定理 5.3 知 $A/\mathrm{rad}(A)$ 是半单代数.

(ii) $(\mathrm{rad}(A) + I)/I$ 是 A/I 的幂零理想, 故 $(\mathrm{rad}(A) + I)/I \subseteq \mathrm{rad}(A/I) = 0$, 即 $\mathrm{rad}(A) \subseteq I$. □

下述定理表明任一有限维 F- 代数 A 上的单模均可视为半单代数 $A/\mathrm{rad}(A)$ 上的单模.

5.5　定理　设 A 是任一有限维 F- 代数, S 是任一有限维单 A-模. 则

(i) $\mathrm{rad}(A)S = 0$. 从而 S 是 $A/\mathrm{rad}(A)$ 上的单模.

特别地, 单 A- 模的个数等于 $A/\mathrm{rad}(A)$ 的单因子的个数.

(ii) 设单 A- 模 S 相应的 $A/\mathrm{rad}(A)$ 的单因子是 $M_n(D)$, $\rho: A \longrightarrow \mathrm{End}_F(S)$ 是相应的代数同态. 则

$$\rho(A) \cong M_n(D).$$

特别地, 若 $\mathrm{Hom}_A(S,S) \cong F$, 则 $\rho(A) = M_n(F)$. 此时 $\dim_F S = n$; 并且存在 S 的一组 F- 基 B, 使得 $\rho(a)$ 在 B 下的矩阵就是 $\rho(a)$, $\forall a \in A$.

证 (i) 若 $\mathrm{rad}(A)S \neq 0$, 则 $\mathrm{rad}(A)S = S$. 因为 $\mathrm{rad}(A)$ 是幂零理想, 故有 $0 = (\mathrm{rad}(A))^m S = S$, 矛盾！于是 $\mathrm{rad}(A)S = 0$, 从而 S 可视为 $A/\mathrm{rad}(A)$ 上的单模.

(ii) 令 $A_i = M_n(D)$. 设 $\rho' : A_i \longrightarrow \mathrm{End}_F(S)$ 是单 A_i- 模 S 相应的代数同态. 则

$$\rho = \rho' \pi_i \pi,$$

其中 $\pi : A \longrightarrow A/\mathrm{rad}(A)$ 和 $\pi_i : A/\mathrm{rad}(A) \longrightarrow A_i$ 是典范同态. 再由定理 4.7(iii) 即得. □

由此可以得到下述有用的结果:

5.6 定理 设 (S,ρ) 与 (S',ρ') 是有限维 F- 代数 A 上的两个互不同构的不可约表示, $\forall a \in A$. 则存在 $b \in A$ 使得

$$\rho(b) = \rho(a), \quad \rho'(b) = 0.$$

证 设 $A/\mathrm{rad}(A) = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_s}(D_s)$, 其中 D_i 是可除 F- 代数. 令 (V_i,ρ_i) 是单因子 $M_{n_i}(D_i)$ 上的唯一单模. 则 V_i 是 $A/\mathrm{rad}(A)$ 上的单模, 相应的代数同态仍记为 ρ_i. 因此 $\forall x_j \in M_{n_j}(D_j)$, $j \neq i$, 则

$$x_j \cdot V_i = \rho_i(x_j) \cdot V_i = 0.$$

令 $\pi : A \to A/\mathrm{rad}(A)$ 是典范同态, 则由定理 5.5(i) 和定理 4.7(i) 与 (ii) 知 $(V_i, \rho_i\pi)$, $i = 1,\cdots,s$, 是 A 的全体互不同构的单模. 因此, 存在 $i \neq j$ 使得 $(S,\rho) \cong (V_i,\rho_i\pi)$, $(S',\rho') \cong (V_j,\rho_j\pi)$.

设 $\pi(a) = x_1 + \cdots + x_s$. 其中 $x_t \in M_{n_t}(D_t)$.

令 $b \in \pi^{-1}(x_i)$. 则

$$\rho_i\pi(b) = \rho_i(x_i) = \rho_i\pi(a),$$

$$\rho_j\pi(b) = \rho_j(x_i) = 0,$$

因此 $\rho(b)=\rho(a)$, $\rho'(b)=0$. □

将此结果应用于有限群的表示, 我们得到定理 II.3.2 的一个推广.

5.7　定理　设 F 是有限群 G 的分裂域. 则 $\mathrm{Irr}_F G$ 是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的线性无关子集. 特别地, $\mathrm{Irr}_F G$ 中元非零、互异.

证　设 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G=\{\rho_1,\cdots,\rho_s\}$, ρ_i 的特征标记为 χ_i.

令 $\sum\limits_{i=1}^{s} c_i\chi_i=0$, $c_i\in F$. 由定理 5.5(ii) 知 $\rho_i(FG)=M_{n_i}(F)$. 令 e_{i11} 是 $M_{n_i}(F)$ 的 (1,1) 处为 1, 其余全为 0 的矩阵. 则由定理 5.6 知存在 $b_i\in A=FG$, 使得

$$\rho_i(b_i)=e_{i11},\quad \rho_j(b_i)=0.$$

从而

$$\chi_i(b_i)=1,\quad \chi_j(b_i)=0.$$

由此即推出 $c_i=0$, $1\leq i\leq s$. □

注　可以用 "$\mathrm{char}F\nmid |G|$" 来代替 "F 是 G 的分裂域", 上述结论仍成立. 参见定理 10.4. 我们指出, 上述结论对于任一域都正确. 参见 [CR2], p.148.

5.8　引理　设 $\mathrm{rad}(A)=0$. 则

(i) A 的所有极大左理想之交为零.

(ii) A 的所有极大右理想之交为零.

(iii) A 的所有极大理想之交为零.

证　(i) 令 J 是 A 的所有极大左理想之交. 假设 $J\neq 0$. 因为 $J\supseteq J^2\supseteq\cdots$, 且 J 的维数有限, 故必存在 k 使得 $J^k=J^{k+1}=\cdots=J^{2k}$, 即 $P^2=P$, 其中 $P=J^k$. 因为 $\mathrm{rad}(A)=0$, 故 A 无非

零的幂零左理想，从而 $P \neq 0$. 令

$$\Omega = \{I \text{ 是 } A \text{ 的左理想} \mid I \subseteq P,\ PI \neq 0\}.$$

则 $P \in \Omega$, 即 Ω 非空. 设 I 是 Ω 中一个维数最小的元. 取 $b \in I$, 使得 $Pb \neq 0$, 则 $Pb \subseteq I \subseteq P$, $P(Pb) = P^2b = Pb \neq 0$, 从而 $Pb \in \Omega$. 于是由 I 的选取知 $I = Pb$. 令 $b = zb$, $z \in P$. 则 $(1-z)b = 0$, 从而 $1-z$ 不可逆，$A(1-z) \neq A$, 故 $A(1-z)$ 含于 A 的某一极大左理想 L, 从而 $1-z \in L$, $1 \in z + L = L$(因为 $z \in P \subseteq J$, 即 z 属于 A 的任一极大左理想). 这表明 $L = A$, 矛盾！这就证明了 $J = 0$.

(ii) 同理可证.

(iii) 由定理 5.3 知 A 是半单代数，即 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, A_i 均为单代数. 再由定理 1.5 知 A 的任一极大理想具有形式 $A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n$. 从而所有极大理想之交为零. □

5.9 A 的理想 I 称为拟正则理想，如果 $1-x$ 可逆，$\forall x \in I$. 类似地定义拟正则左 (右) 理想. 下述定理总结了 $\mathrm{rad}(A)$ 的主要刻画.

定理 (i) $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的所有极大理想之交.

(ii) $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的所有极大左理想之交.

(iii) $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的所有极大右理想之交.

(iv) $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的最大拟正则理想.

(v) $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的最大拟正则左理想.

(vi) $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的最大拟正则右理想.

(vii) $\mathrm{rad}(A) = \bigcap\limits_{S} \mathrm{ann}\,(S)$, S 取遍单 A- 模.

证 (i) 由推论 5.4 知 $\mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}(A)) = 0$. 因此由引理 5.8(iii) 知 $A/\mathrm{rad}(A)$ 的所有极大理想之交为零. 若 I 是 A 的任一极大理想，则 $I \supseteq \mathrm{rad}(A)$. (否则，$I + \mathrm{rad}(A) = A$, 于是 $1 = i + r$, 其中

$i \in I$, $r \in \mathrm{rad}(A)$. 因为 r 是幂零元，故 $i = 1 - r$ 是可逆元，这与 $I \neq A$ 相矛盾.) 这表明 $I/\mathrm{rad}(A)$ 是 $A/\mathrm{rad}(A)$ 的极大理想当且仅当 I 是 A 的极大理想. 于是

$$\cap(I/\mathrm{rad}(A)) = (\cap I)/\mathrm{rad}(A) = (0),$$

其中 I 取遍 A 的极大理想. 这就证明了 (i).

(ii) 与 (iii) 可类似地证明.

(iv) 因为 $\mathrm{rad}(A)$ 中任一元 x 均为幂零元, 故 $1-x$ 可逆, 从而 $\mathrm{rad}(A)$ 是拟正则理想. 设 I 是 A 的任一拟正则理想. 若 $I \not\subseteq \mathrm{rad}(A)$. 则由 (i) 可知 $I \not\subseteq J$, J 是 A 的某一极大理想, 从而 $I + J = A$. 于是 $1 = i + j$, $i \in I$, $j \in J$. 故 $j = 1 - i$ 是可逆元, 从而 $1 \in J$, $J = A$. 矛盾. 这表明 $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的最大拟正则理想.

(v) 与 (vi) 同理可证.

(vii) 设 S 是任一单 A- 模. 则由定理 5.5(i) 知 $\mathrm{rad}(A)S = 0$, 即 $\mathrm{rad}(A) \subseteq \mathrm{ann}(S)$, 从而 $\mathrm{rad}(A)$ 含于 $\bigcap\limits_S \mathrm{ann}(S)$, 其中 S 取遍单 A- 模.

反之，设 $a \in \bigcap\limits_S \mathrm{ann}(S)$. 考虑半单代数 $A/\mathrm{rad}(A)$. 因为 $\overline{A} = A/\mathrm{rad}(A)$ 可分解成单 $\overline{A}$- 模的直和，从而 ${}_A\overline{A}$ 是单 A- 模的直和. 于是 $a\overline{A} = 0$, 特别地， $a \cdot \bar{1} = \bar{a} = 0$, 即 $a \in \mathrm{rad}(A)$. 这就证明了 $\mathrm{rad}(A) = \bigcap\limits_S \mathrm{ann}(S)$. □

5.10　定理　设 A 是有限维 F- 代数. 则 A 是单代数当且仅当存在忠实的单 A- 模.

证　设 A 是单代数. 令 $A = M_n(D)$, D 是可除 F- 代数. 则由定理 4.7(ii) 的证明知 A 有唯一的单模 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in D \right\}$.

直接验证可知 $\mathrm{ann}\,(V) = 0$.

反之，若存在忠实的单 A- 模 S. 则由定理 5.9(vii) 知 $\mathrm{rad}(A)=0$, 即 A 是半单代数. 故 $A=A_1\times\cdots\times A_s$, A_i 均为单代数. 由定理 4.7(i) 知 S 必是某一 A_i 上的单模，且 $A_jS=0$, $j\neq i$. 从而 $A_j\subseteq\mathrm{ann}(S)$, $j\neq i$, 故由 S 的忠实性知 $s=1$, 即 A 是单代数. □

5.11 设 A 是任一有限维 F- 代数，M 是左 A- 模. 定义 $\mathrm{rad}(M)=\mathrm{rad}(A)M$, 称为模 M 的 Jacobson 根.

根据定义，左正则模 ${}_AA$ 的根恰为 $\mathrm{rad}(A)$. 下述定理列出了模的 Jacobson 根的基本性质.

5.12 定理 (i) $\mathrm{rad}\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{s}M_i\right)=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}\mathrm{rad}(M_i)$.

特别地，若 $A=A_1\times\cdots\times A_s$, 则

$$\mathrm{rad}(A)=\mathrm{rad}\,(A_1)\times\cdots\times\mathrm{rad}\,(A_s).$$

(ii) M 是半单模当且仅当 $\mathrm{rad}(M)=0$.

(iii) $M/\mathrm{rad}(M)$ 是半单模.

(iv) $\mathrm{rad}(M)$ 恰是模 M 的所有极大子模之交.

(v) (Nakayama 引理) 设 $f:\ M\to N$ 是 A- 模同态. 则 $f(\mathrm{rad}(M))\subseteq\mathrm{rad}(N)$. 从而 f 诱导出 A- 模同态

$$\tilde{f}:\ M/\mathrm{rad}(M)\ \to\ N/\mathrm{rad}(N),$$
$$\tilde{f}(m+\mathrm{rad}(M))=f(m)+\mathrm{rad}(N),$$

且 f 是满射当且仅当 $\tilde{f}$ 是满射.

证 (i) 由定义知

$$\mathrm{rad}\left(\bigoplus_{i=1}^{s}M_i\right)=\mathrm{rad}(A)\left(\bigoplus_{i=1}^{s}M_i\right)\subseteq\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{rad}(A)M_i=\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{rad}(M_i).$$

另一方面

$$\operatorname{rad}(M_i) \subseteq \operatorname{rad}\left(\bigoplus_{i=1}^{s} M_i\right),\ 1 \leq i \leq s,$$

从而

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{rad}(M_i) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{rad}(M_i) \subseteq \operatorname{rad}\left(\bigoplus_{i=1}^{s} M_i\right).$$

(ii) 设 M 是半单 A- 模. 由 (i) 和定理 5.5(i) 知 $\operatorname{rad}(A)M = 0$, 即 $\operatorname{rad}(M) = 0$.

反之, 若 $\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(A)M = 0$. 则 M 可视为半单代数 $A/\operatorname{rad}(A)$ 上的模. 从而 M 是半单 $A/\operatorname{rad}(A)$- 模, 进而 M 是半单 A- 模.

(iii) 由定义有

$$\begin{aligned}\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(M)) &= \operatorname{rad}(A) \cdot (M/\operatorname{rad}(M)) \\ &= (\operatorname{rad}(A)M)/\operatorname{rad}(M) \\ &= 0,\end{aligned}$$

再由 (ii) 即知 $M/\operatorname{rad}(M)$ 是半单 A- 模.

(iv) 设 N 是 M 的任一极大子模. 则 M/N 是单模. 从而由 (ii) 知

$$0 = \operatorname{rad}(M/N) = \operatorname{rad}(A) \cdot (M/N) = (\operatorname{rad}(A)M + N)/N,$$

即 $\operatorname{rad}(M) \subseteq N$. 从而 $\operatorname{rad}(M)$ 包含于 M 的所有极大子模的交.

反之, 设 $m \notin \operatorname{rad}(M)$, 则 $0 \neq \overline{m} \in \overline{M} = M/\operatorname{rad}(M)$. 而 $\overline{M}$ 是半单 A- 模, 故存在单 A- 模 S 及模同态 $f : \overline{M} \to S$ 使得 $f(\overline{m}) \neq 0$, 从而 $g(m) \neq 0$, 其中 $g = f\pi : M \to S$, $\pi : M \to \overline{M}$. 即 $m \notin \operatorname{Ker} g$. 由于 S 是单模, 故 $\operatorname{Ker} g$ 是 M 的极大子模, 从而 m 不在 M 的所有极大子模的交集中.

(v) 由定义知

$$f(\mathrm{rad}(M)) = f(\mathrm{rad}(A)M) = \mathrm{rad}(A)f(M)$$
$$\subseteq \mathrm{rad}(A)N = \mathrm{rad}(N).$$

特别地，若 f 满，则 $f(\mathrm{rad}(M)) = \mathrm{rad}(N)$. 此时 $\tilde{f}$ 显然是满的.

反之，设 $\tilde{f}$ 满. 则 $N = f(M) + \mathrm{rad}(N)$. 则 $f(M) = N$, 即 f 满. （否则，$f(M)$ 属于 N 的某一极大子模 L, 而由 (iv) 知 $\mathrm{rad}(N) \subseteq L$. 于是 $N = f(M) + \mathrm{rad}(N) \subseteq L$. 矛盾 !) □

习 题

1. 证明：$\mathrm{rad}(A/I) = (\mathrm{rad}(A) + I)/I$. [提示：利用代数同构

$$(A/I)/((\mathrm{rad}(A) + I)/I) \cong A/(\mathrm{rad}(A) + I)$$
$$\cong (A/\mathrm{rad}(A))/((\mathrm{rad}(A) + I)/\mathrm{rad}(A))$$

和习题 4.7 推出 $(A/I)/((\mathrm{rad}(A) + I)/I)$ 是半单代数. 从而由推论 5.4(ii) 知 $\mathrm{rad}(A/I) \subseteq (\mathrm{rad}(A) + I)/I$.]

2. A 的左 (右) 理想 I 称为诣零理想，若 I 中任一元均是幂零元. 证明：$\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的最大诣零理想.

3. 证明：$\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的使得 A/I 是半单代数的唯一幂零 (拟正则，诣零) 理想 I 且 A/I 是半单代数.

4. 用 $T_n(F)$ 表示域 F 上 n 阶上三角矩阵作成的代数. 求 $\mathrm{rad}(T_n(F))$.

5. 求 $\mathrm{rad}(F[x]/\langle f(x)\rangle)$.

6. 设 N, L 均为 M 的子模，且 $N + L = M$, $N \subseteq \mathrm{rad}(M)$. 则 $L = M$.

7. 设 g 与 h 是有限群 G 的两个不同的元，$\mathrm{char}F \nmid |G|$. 则存在 G 的不可约 F- 表示 ρ 使得 $\rho(g) \neq \rho(h)$. 特别地，若 $g \neq 1$,

则存在 G 的不可约 F- 表示 ρ 使得 $\rho(g)$ 不是单位阵. [提示：否则，$g-h\in \mathrm{rad}(FG)$.]

8. 设 M, N 是 L 的子模且 $L/M, L/N$ 均为半单模. 证明 $L/(M\cap N)$ 也是半单模.

§6 Krull-Schmidt-Remak 定理

设 A 是任一有限维代数，M 是任一有限维 A- 模.

回顾 M 称为可分解的, 如果存在 M 的两个非零的子模 M_1, M_2 使得 $M = M_1\oplus M_2$; 否则，称 M 是不可分解模. 因此，若 M 不可分解且 $M = M_1\oplus M_2$, 必推出 $M_1 = \{0\}$ 或 $M_2 = \{0\}$.

6.1 命题 设 A 是任一有限维代数，M 是任一有限维 A- 模. 则 M 必可分解成不可分解 A- 模的直和.

证 若 M 不可分解，则结论自然正确.

若 M 可分解，则有 $M = M_1\oplus M_2$, $M_1\neq\{0\}$, $M_2\neq\{0\}$. 故 $\dim_F M_1 < \dim_F M$, $\dim_F M_2 < \dim_F M$. 因此由归纳法知 M_1, M_2 均可分解为不可分解模的直和，从而证得. □

对于半单代数，不可分解模就是不可约模，从而在半单代数的表示论中只需要研究不可约模. 而对于非半单代数，存在不可分解的可约模，因此仅研究不可约模是远远不够的. 于是在研究非半单代数的表示中，首要的问题就是一个模分解成不可分解模的直和是不是唯一的？下述定理给出了肯定的回答，它是代数表示论中最基本的定理之一.

6.2 定理 (Krull-Schmidt-Remak) 设 A 是有限维代数，M 是任

一有限维 A- 模. 设

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_m,$$

其中 M_i、N_j 均为非零的不可分解 A- 模, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. 则 $m = n$, 且存在 $\{1, \cdots, n\}$ 的一个置换 π 使得

$$N_i \cong M_{\pi(i)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

为了证明这一基本定理, 需要做若干准备.

6.3 Fitting 引理 设 A 是有限维代数, M 是不可分解 A- 模, $f \in \mathrm{End}_A(M)$. 则 f 或者是 M 的自同构, 或者幂零.

证 设 f 不是同构. 因 M 有限维, 故 f 既非单, 也非满. 考虑 M 的子模序列

$$M = \mathrm{Im} f^0 \supseteq \mathrm{Im} f \supseteq \mathrm{Im} f^2 \supseteq \cdots$$

和

$$(0) = \mathrm{Ker} f^0 \subseteq \mathrm{Ker} f \subseteq \mathrm{Ker} f^2 \subsetneq \cdots.$$

因 $\dim_F M < +\infty$, 故必存在 $n \geq 0$ 和 $m \geq 0$ 使得

$$\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^{n+1} = \cdots,$$
$$\mathrm{Ker} f^m = \mathrm{Ker} f^{m+1} = \cdots.$$

取 $s = \max\{n, m\}$. 因 f 非满, 故 $s > 0$. 下证

$$M = \mathrm{Im} f^s \oplus \mathrm{Ker} f^s.$$

事实上, $\forall x \in M$, $f^s(x) \in \mathrm{Im} f^s = \mathrm{Im} f^{2s}$. 从而存在 $y \in M$ 使得

$$f^s(x) = f^{2s}(y),$$

故 $x - f^s(y) \in \mathrm{Ker}f^s$, 即 $x = f^s(y) + (x - f^s(y))$, 这就证明了 $M = \mathrm{Im}f^s + \mathrm{Ker}f^s$. 若 $x \in \mathrm{Im}f^s \cap \mathrm{Ker}f^s$, 则 $x = f^s(y)$, 于是 $0 = f^s(x) = f^{2s}(y)$. 即 $y \in \mathrm{Ker}f^{2s} = \mathrm{Ker}f^s$, 从而 $x = f^s(y) = 0$. 于是 $\mathrm{Im}f^s \cap \mathrm{Ker}f^s = \{0\}$.

因 f 非单, 故 $\mathrm{Ker}f^s \neq 0$. 又因 M 不可分解, 故必有 $\mathrm{Im}f^s = \{0\}$, 即 f 是幂零的. □

6.4　定义　设 A 是有限维代数. A 称为局部代数, 如果 A 的所有不可逆元的集合是 A 的理想.

命题　下述命题等价:

(i) A 是局部代数.

(ii) A 有唯一的极大左理想.

(ii′) A 有唯一的极大右理想.

(iii) $\mathrm{rad}(A) = \{a \in A \mid a$ 不可逆$\}$.

(iv) $A/\mathrm{rad}(A)$ 是可除代数.

证　(i) $\Rightarrow$ (ii): 此时由定义知 $\{a \in A \mid a$ 不可逆$\}$ 就是 A 的唯一极大左理想.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 若 a 不可逆, 则 Aa 是 A 的左理想且 $Aa \neq A$. 因此 Aa 含于 A 的唯一极大左理想之中. 而 $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的所有极大左理想之交 (定理 5.9), 故 $Aa \subseteq \mathrm{rad}(A)$, 特别地, $a \in \mathrm{rad}(A)$; 反之, 若 $a \in \mathrm{rad}(A)$, 则 a 幂零, 故 a 不可逆. 由此即证得 (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 设 $0 \neq x \in A/\mathrm{rad}(A)$. 设 $a \in A$ 使得 $\bar{a} = x$. 则 $a \notin \mathrm{rad}(A)$. 故由题设知 a 可逆, 从而 $x = \bar{a}$ 可逆.

(iv) $\Rightarrow$ (i): 设 $a \in A$ 不可逆. 则 $a \in \mathrm{rad}(A)$. (否则, $0 \neq \bar{a} \in A/\mathrm{rad}(A)$. 故由题设 $\bar{a}$ 可逆. 即有 $b \in A$ 使得 $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$, 即 $1 - ab \in \mathrm{rad}(A)$. 从而 $1 - ab$ 幂零. 这推出 $1 - (1 - ab)$ 可逆, 即 ab 可逆, 从而 a 可逆.) 于是 A 中不可逆元的集合恰为理想 $\mathrm{rad}(A)$.

同理可证 (i) $\Rightarrow$ (ii$'$) $\Rightarrow$ (iii). □

6.5 定理 设 A 是有限维代数, M 是任一有限维 A- 模. 则下述命题等价:

(i) M 不可分解.

(ii) $\mathrm{End}_A(M)$ 仅有两个平凡的幂等元, 即 0 和 1.

(iii) $\mathrm{End}_A(M)$ 是局部代数.

证 (i) $\Leftrightarrow$ (ii): 即 2.10 推论 1.

(i) $\Rightarrow$ (iii): 令

$$I = \{f \in \mathrm{End}_A(M) \mid f \text{ 不可逆}\}.$$

则由 Fitting 引理知 I 中任一元均幂零. 因此, 若 $f \in I$, $g \in \mathrm{End}_A(M)$, 则 fg 与 gf 均不可逆. 剩下只要证 I 对于加法封闭.

设 $f_1, f_2 \in I$. 若 $f_1 + f_2 \notin I$, 则 $f_1 + f_2$ 有逆元 h. 因此 $f_1h + f_2h = 1$. 但 $f_1h \in I$, 故 f_1h 幂零, 从而 $f_2h = 1 - f_1h$ 可逆. 这与 $f_2h \in I$ 不合.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): 假设存在 $e \in \mathrm{End}_A(M)$, $e^2 = e$, $e \neq 0, 1$. 因为 $1 = e + (1-e)$, 由局部代数的定义知 e 与 $1-e$ 中必有一个可逆, 这与 $e(1-e) = e - e^2 = 0$ 不合. □

6.6 引理 设 M, N 均为 A- 模且 N 不可分解, $M \neq \{0\}$. 若 $f: M \to N$ 与 $g: N \to M$ 均为 A- 模同态, 且 gf 是 M 的自同构, 则 f 与 g 均为模同构.

证 令 k 是 gf 的逆. 则 $kgf = 1_M$. 令 $l = kg: N \to M$. 则 $lf = 1_M$. 令 $e = fl: N \to N$. 则

$$e^2 = flfl = f1_Ml = fl = e.$$

因 N 不可分解, 故 $e = 1_N$ 或 $e = 0$. 但 $e = 0$ 是不可能的, 否则

$1_M = 1_M^2 = lflf = lef = 0$, 与 $M \neq \{0\}$ 不合. 于是 $fl = e = 1_N$, 从而 f 是同构, $g = k^{-1}f^{-1}$ 也是同构. □

6.7　定理 6.2 的证明　对于 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 不妨假设 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$. 设 $n > 1$, e_i 是 M 到 M_i 上的投影映射, f_j 是 M 到 N_j 上的投影映射. 则 e_i, f_j 均为 $\mathrm{End}_A(M)$ 中的幂等元, $1_M = e_1 + \cdots + e_n = f_1 + \cdots + f_m$.

令

$$h_j = f_j e_1, \quad k_j = e_1 f_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

则有

$$\sum_{j=1}^{m} k_j h_j = \sum_{j=1}^{m} e_1 f_j f_j e_1 = \sum_{j=1}^{m} e_1 f_j e_1$$
$$= e_1 \left(\sum_{j=1}^{m} f_j \right) e_1 = e_1.$$

将 $k_j h_j$ 限制在 M_1 上, 则得 M_1 到 M_1 的模同态, 记为 $(k_j h_j)'$; 而 e_1 限制在 M_1 上则是 $\mathrm{End}_A(M_1)$ 中的单位元 1_{M_1}. 于是有

$$1_{M_1} = \sum_{j=1}^{m} (k_j h_j)'.$$

由定理 6.5 知 $\mathrm{End}_A(M_1)$ 是局部代数, 故存在 j 使得 $(k_j h_j)'$ 是 $\mathrm{End}_A(M_1)$ 中的可逆元.

令 h_j' 是 h_j 在 M_1 上的限制. 则 $h_j' : M_1 \to N_j$. 令 k_j' 是 k_j 在 N_j 上的限制. 则 $k_j' : N_j \to M_1$. 显然有

$$k_j' h_j' = (k_j h_j)'.$$

由引理 6.6 知 h_j' 和 k_j' 均为 A- 模同构, 从而 $N_j \cong M_1$.

我们断言

$$M = N_j \oplus (M_2 + \cdots + M_n).$$

设 $x \in N_j \cap (M_2 + \cdots + M_n)$. 则 $e_1(x) = 0$. 因此

$$0 = e_1(x) = e_1 f_j(x) = k_j(x) = k_j'(x).$$

从而 $x = 0$, 即 $N_j \cap (M_2 + \cdots + M_n) = \{0\}$.

设 $x \in N_j \oplus (M_2 + \cdots + M_n)$. 则 $x, e_2(x), \cdots, e_n(x)$ 均是 $N_j \oplus (M_2 + \cdots + M_n)$ 中元，从而

$$e_1(x) = x - e_2(x) - \cdots - e_n(x) \in N_j \oplus (M_2 + \cdots + M_n).$$

从而

$$N_j \oplus (M_2 + \cdots + M_n) \supseteq e_1(N_j) = e_1 f_j(N_j) = k_j'(N_j) = M_1.$$

这就证明 $M = N_j \oplus (M_2 + \cdots + M_n)$.

于是得到 M/N_j 的分解

$$\begin{aligned} N/M_j &\cong M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \\ &\cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_{j-1} \oplus N_{j+1} \oplus \cdots \oplus N_m. \end{aligned}$$

从而由归纳法即知定理成立. □

习　题

1. 设 A 是由幂零元生成的独生子代数，则 A 是局部代数.
2. 设 F 是域，且

$$A = \{(a_{ij}) \in M_n(F) \mid a_{ii} = a,\ i = 1, \cdots, n;\ a_{ij} = 0,\ i > j\}.$$

则 A 是局部代数.

3. 证明 A 是局部代数当且仅当左正则 A- 模 $_AA$ 不可分解. [提示: 利用定理 6.5.]

4. (模幂零理想地提升幂等元) 设 I 是有限维代数 A 的幂零理想, $u \in A$, $u^2 \equiv u(\operatorname{mod} I)$(即 $\bar{u} = u + I$ 是 A/I 的幂等元). 则存在 A 的幂等元 e, 使得 $\bar{u} = \bar{e}$. [提示: 令 $r = u^2 - u$, $v = u + r - 2ur$. 证明 $v \equiv u(\operatorname{mod} I)$, $v^2 \equiv v(\operatorname{mod} I^2)$. 对 v 施行同样的办法, 得到元素 v_1 使得 $v_1 \equiv v(\operatorname{mod} I^2)$, $v_1^2 \equiv v_1(\operatorname{mod} I^4)$. 继续这一过程, 并利用 I 的幂零性.]

§7 投射模、内射模、 Frobenius 代数

在非半单代数的表示中, 投射模与内射模是两类重要的模. 以下总设 A 是有限维 F- 代数, A- 模是指有限维 A- 模.

7.1 A- 模 P 称为投射模, 如果对于任一满同态 $p:\ M \to N$ 和任一模同态 $f:\ P \to N$, 均存在模同态 $g:\ P \to M$ 使得 $f = pg$. 这时称 f 可提升到 g. 用交换图来表达即为

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & {}^{g}\swarrow & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array}.$$

换言之, P 称为投射模当且仅当对于任一正合列 $M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$,

$$\operatorname{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(P,\, p)} \operatorname{Hom}_A(P, N) \longrightarrow 0$$

也是 F-mod 中的正合列.

因为 $\operatorname{Hom}_A(P, -)$ 是 A-mod 到 F-mod 的左正合函子 (命题 2.18), 我们立即得到

命题 模 P 是投射模当且仅当 $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ 是正合函子.

例 回顾模 M 称为秩 n 的自由模, 如果存在 M 的一组 F-基 $m_1, \cdots, m_n$ 使得 M 中任一元 m 均可唯一地写成

$$m = a_1m_1 + \cdots + a_nm_n, \quad a_i \in F, 1 \leq i \leq n;$$

或等价地, $M \cong nA$.

显然, 自由模 M 是投射模. 事实上, 对于任一满同态 $p: X \to Y$ 和模同态 $f: M \to Y$, 因 p 满, 故存在 $x_i \in X$ 使得 $p(x_i) = f(m_i), 1 \leq i \leq n$. 令 $g: M \to X$ 是如下模同态:

$$g(a_1m_1 + \cdots + a_nm_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

则有 $f = pg$.

7.2 A-mod 中的短正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \tag{*}$$

称为可裂短正合列, 如果存在模同态 $f': L \to M$ 使得 $f'f = 1_M$.

引理 设 (*) 是短正合列. 则下述命题等价:

(i) (*) 是可裂短正合列.

(ii) $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$ 是 L 的直和项.

(iii) 存在模同态 $g': N \to L$ 使得 $gg' = 1_N$.

(iv) 存在模同态 $f': L \to M$ 和 $g': N \to L$ 使得

$$ff' + g'g = 1_L.$$

证 (i) $\Rightarrow$ (ii): 设 $f': L \to M$ 使得 $f'f = 1_M$. 我们断言

$$L = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f'.$$

事实上，$\forall x\in L$，$x=ff'(x)+(x-ff'(x))$，且 $ff'(x)\in \mathrm{Im}f$，$x-ff'(x)\in \mathrm{Ker}f'$；又直接可验证 $\mathrm{Im}f\cap \mathrm{Ker}f'=\{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)：设 $L=\mathrm{Im}f\oplus N'$. 则 $g(L)=g(N')=N$. 直接验证 g 在 N' 上的限制是 N' 到 N 的模同构. 故存在 $g':N\to N'$ 使得 $gg'=1_N$. 将 g' 视为 N 到 L 的模同态即证得.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)：类似于 (i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明，我们有

$$L=\mathrm{Ker}g\oplus \mathrm{Im}g'.$$

因 $\mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}f$，$f$ 单，故 $f:M\to \mathrm{Ker}g$ 是模同构，从而有 $f'':\mathrm{Ker}g\to M$ 使得 $f''f=1_M$，$ff''=1_{\mathrm{Ker}g}$. 令 f' 是 L 到 $\mathrm{Ker}g$ 的投影与 f'' 的合成，则 $f'f=1_M$，且

$$1_L=ff'+g'g.$$

事实上，设 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in \mathrm{Ker}g$，$x_2\in \mathrm{Im}g'$. 令 $x_2=g'(x_2')$. 则

$$\begin{aligned}(ff'+g'g)(x)&=ff'(x)+g'g(x)\\&=ff'(x_1)+g'g(x_2)\\&=x_1+g'gg'(x_2')\\&=x_1+g'(x_2')\\&=x_1+x_2\\&=x.\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i)：设有 $1_L=ff'+g'g$. 则

$$\begin{aligned}f=1_Lf&=(ff'+g'g)f\\&=ff'f+g'gf\\&=ff'f.\end{aligned}$$

但 f 单, 故 $f'f = 1_M$. □

推论 若 (*) 可裂, 则 $L \cong M \oplus N$.

证 由引理 7.2(ii) 知 $L = \mathrm{Ker}g \oplus N'$, 而 $g: L \xrightarrow{g} N$ 满, 故 $N \cong L/\mathrm{Ker}g \cong N'$. □

下述定理给出了投射模的基本刻画.

7.3 定理 下述命题等价:

(i) P 是投射模.

(ii) 任一短正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ 是可裂短正合列.

(iii) P 是自由模的直和项, 即存在自由模 W 和模 P' 使得

$$W \cong P \oplus P'.$$

证 (i) $\Rightarrow$ (ii): 根据定义, 对于 $1_P: P \to P$, 存在模同态 $g': P \to N$, 使得 $1_P = gg'$. 由引理 7.2 知给定的短正合列可裂.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 因为任一模均为自由模的同态像, 故有满同态 $\pi: W \to P$, 其中 W 是自由模, 从而有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\pi \longrightarrow W \longrightarrow P \longrightarrow 0.$$

由题设知这是可裂正合列, 故由上述推论知 P 是 W 的直和项.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 设有满同态 $p: X \to Y$ 和模同态 $h: P \to Y$. 因 $W \cong P \oplus P'$, 故得到 $h': W \to Y$, 其中 h' 是 W 到 P 上的投影与 h 的合成. 因自由模 W 是投射模, 故存在模同态 $k: W \to X$ 使得 $pk = h'$. 将 k 限制在 P 上即得到 $k': P \to X$ 满足 $pk' = h$. 由定义知 P 是投射模. □

推论 若 $N \to P$ 是满同态, 且 P 是投射模, 则 P 是 N 的直和项.

上述 (iii) ⇒ (i) 事实上证明了：若 $P_1 \oplus P_2$ 是投射模，则 P_1 与 P_2 均为投射模；反之也对 (留作习题). 于是我们有

7.4　命题　$P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ 是投射模当且仅当每个 P_i 均为投射模.

7.5　命题　设 P 与 Q 均为投射模. 则 P 与 Q 同构当且仅当半单模 $P/\mathrm{rad}(P)$ 与半单模 $Q/\mathrm{rad}(Q)$ 同构.

证　若 $f: P \longrightarrow Q$ 是模同构，则

$$\begin{aligned} f(\mathrm{rad}(P)) &= f(\mathrm{rad}(A)P) = \mathrm{rad}(A)f(P) \\ &= \mathrm{rad}(A)Q = \mathrm{rad}(Q), \end{aligned}$$

从而 $\tilde{f}: P/\mathrm{rad}(P) \longrightarrow Q/\mathrm{rad}(Q)$ 也是同构，其中

$$\tilde{f}(p + \mathrm{rad}(P)) = f(p) + \mathrm{rad}(Q).$$

反之，设 $\varphi: P/\mathrm{rad}(P) \longrightarrow Q/\mathrm{rad}(Q)$ 是同构. 令 $\pi_Q : Q \longrightarrow Q/\mathrm{rad}(Q)$ 是典范满同态. 因 P 为投射模，故 $P \xrightarrow{\pi_P} P/\mathrm{rad}(P) \overset{\varphi}{\cong} Q/\mathrm{rad}(Q)$ 可提升为模同态 $f: P \longrightarrow Q$, 使得 $\pi_Q f = \varphi\pi_P$. 显然 φ 就是 f 诱导出的模同态 $\tilde{f}: P/\mathrm{rad}(P) \longrightarrow Q/\mathrm{rad}(Q)$. 故由 Nakayama 引理 (定理 5.12(v)) 知 f 是满射. 同理得到 Q 到 P 的满同态. 比较维数即知 $P \cong Q$. □

下述定理是有限维代数上不可分解投射模的主要刻画，它既给出了不可分解投射模与正则 A- 模的关系，又描述了不可分解投射模与单模的一一对应关系.

7.6　定理　(i) 任一不可分解投射模 P 均有唯一的极大子模. 从而 $\mathrm{rad}(P)$ 是 P 的唯一极大子模.

(ii) 设 $P_1, \cdots, P_n$ 是正则模 $_AA$ 的全部两两互不同构的不可分解直和项. 则 $P_1, \cdots, P_n$ 恰为全部的两两互不同构的不可分解

投射模.

(iii) 设 **P** 是所有互不同构的不可分解投射模的集合，**S** 是所有互不同构的单模的集合. 则 $P \longmapsto P/\mathrm{rad}(P)$ 是 **P** 到 **S** 的双射.

证 断言 1 对于任一 P_i，存在 A 的幂等元 e_i 使得 $P_i = Ae_i$.

因 P_i 是 ${}_AA$ 的直和项，故有 ${}_AA = P_i \oplus W_i$. 设 $1 = e_i + e_i'$，其中 $e_i \in P_i$，$e_i' \in W_i$. 则 $A = Ae_i + Ae_i'$. 但 $Ae_i \subseteq P_i$，$Ae_i' \subseteq W_i$，故 $Ae_i = P_i$. 因 $e_i = e_i(e_i + e_i') = e_i^2 + e_ie_i', e_i^2 \in P_i, e_ie_i' \in W_i$，故由直和性即推出 $e_i = e_i^2$.

断言 2 $\mathrm{rad}(e_iAe_i) = e_i\mathrm{rad}(A)e_i$.

事实上，$e_i\mathrm{rad}(A)e_i$ 是 e_iAe_i 的幂零理想，故 $e_i\mathrm{rad}(A)e_i \subseteq \mathrm{rad}(e_iAe_i)$. 令 $\bar{A} = A/\mathrm{rad}(A)$, $\bar{e}_i = e_i + \mathrm{rad}(A) \in \bar{A}$. 因 $\bar{A}$ 是半单代数，故 $\bar{A}\bar{e}_i$ 是半单 $\bar{A}$- 模. 从而 $\mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{A}\bar{e}_i) \cong \bar{e}_i\bar{A}\bar{e}_i$ 也是半单代数 (习题 4.6)，于是 $e_iAe_i/e_i\mathrm{rad}(A)e_i \cong \bar{e}_i\bar{A}\bar{e}_i$ 是半单代数，从而 $\mathrm{rad}(e_iAe_i) \subseteq e_i\mathrm{rad}(A)e_i$ (推论 5.4(ii)). 这就证明了上述断言.

断言 3 $\mathrm{rad}(P_i) = \mathrm{rad}(Ae_i)$ 是 $P_i = Ae_i$ 的唯一极大子模.

因 $P_i = Ae_i$ 不可分解，故 $\mathrm{End}_A(Ae_i) \cong e_iAe_i$ 是局部代数 (定理 6.5). 从而 $e_iAe_i/\mathrm{rad}(e_iAe_i)$ 是可除代数 (命题 6.4). 于是由断言 2 知 $\bar{e}_i\bar{A}\bar{e}_i \cong e_iAe_i/e_i\mathrm{rad}(A)e_i = e_iAe_i/\mathrm{rad}(e_iAe_i)$ 是可除代数，而 $\mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{A}\bar{e}_i) \cong \bar{e}_i\bar{A}\bar{e}_i$ 是可除代数意味着 $\bar{A}\bar{e}_i$ 不可分解 (定理 6.5). 但 $\bar{A}\bar{e}_i$ 是半单 $\bar{A}$- 模，故 $\bar{A}\bar{e}_i$ 是单 $\bar{A}$- 模，从而 $\bar{A}\bar{e}_i$ 是单 A- 模. 而

$$Ae_i/\mathrm{rad}(Ae_i) = Ae_i/\mathrm{rad}(A)e_i \cong \bar{A}\bar{e}_i,$$

故 $\mathrm{rad}(Ae_i)$ 是 Ae_i 的极大子模. 另一方面，$\mathrm{rad}(Ae_i)$ 是 Ae_i 的所有极大子模之交 (定理 5.12(iv))，故 $\mathrm{rad}(Ae_i)$ 是 Ae_i 的唯一极大子模.

断言 4　设 S 是单 A- 模. 则存在 P_i 使得

$$S \cong P_i/\mathrm{rad}(P_i).$$

因 $0 \neq S \cong \mathrm{Hom}_A(A, S)$, 故存在 P_i 使 $\mathrm{Hom}_A(P_i, S) \neq 0$.

设 $f: P_i \longrightarrow S$ 是非零模同态. 因 S 单, 故 f 是满同态, 且 $\mathrm{Ker}f$ 是 P_i 的极大子模. 由断言 3 知 $\mathrm{Ker}f = \mathrm{rad}(P_i)$, 从而

$$S \cong P_i/\mathrm{Ker}f = P_i/\mathrm{rad}(P_i).$$

断言 5　若 $i \neq j$, 则 $P_i/\mathrm{rad}(P_i) \ncong P_j/\mathrm{rad}(P_j)$.

否则, 因 P_i, P_j 是投射模, 由命题 7.5 知 $P_i \cong P_j$, 这与 P_i 的选择不合.

断言 6　设 P 是任一不可分解投射模. 则 P 同构于某一 P_i.

因 $P/\mathrm{rad}(P)$ 是半单模, 故有

$$P/\mathrm{rad}(P) \cong \bigoplus_{i=1}^{t} n_i S_i,$$

其中 S_i 均为单 A- 模且 $S_i \ncong S_j$, $i \neq j$. 由断言 4 知 $S_i \cong P_i/\mathrm{rad}(P_i)$.

令 $Q = \bigoplus_{i=1}^{t} n_i P_i$. 则 $\mathrm{rad}(Q) = \bigoplus_{i=1}^{t} n_i \mathrm{rad}(P_i)$. 故有

$$Q/\mathrm{rad}(Q) \cong \bigoplus_{i=1}^{t} n_i P_i/\mathrm{rad}(P_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{t} n_i S_i \cong P/\mathrm{rad}(P).$$

由命题 7.5 知 $P \cong Q$. 但 P 不可分解, 故 P 同构于某一 P_i.

综合断言 3 、断言 4 、断言 5 和断言 6, 定理获证. □

7.7　设 M 是 A- 模. 投射模 P 称为 M 的投射盖, 如果存在满同态 $f: P \to M$ 使得 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}(P)$.

定理 (i) 任一模 M 均有唯一的投射盖 (在同构意义下), 记为 $P(M)$.

(ii) P 是 M 的投射盖当且仅当存在满同态 $f: P \to M$ 使得 f 诱导的同态 $\tilde{f}: P/\mathrm{rad}(P) \longrightarrow M/\mathrm{rad}(M)$ 是同构.

(iii) 设 $g: Q \to M$ 是满同态, 且 Q 是投射模. 则 $Q \cong P(M) \oplus Q'$. 因此, M 的投射盖 P 是使得 $P \to M \to 0$ 正合的最小投射模.

证 因 $M/\mathrm{rad}(M)$ 是单 A- 模的直和, 因此由定理 7.6 知存在投射模 P 使得 $P/\mathrm{rad}(P) \overset{\varphi}{\cong} M/\mathrm{rad}(M)$. 由 P 的投射性知存在 $f: P \to M$ 使得 f 诱导的同态 $\tilde{f}$ 就是 φ. 由 Nakayama 引理 (定理 5.12(v)) 知 f 满, 且 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}(P)$, 即 M 有投射盖.

设 P 是 M 的投射盖, 即有满同态 $f: P \to M$ 使得 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}(P)$. 从而 f 诱导出满同态 $\tilde{f}: P/\mathrm{rad}(P) \longrightarrow M/\mathrm{rad}(M)$. 又因 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}(P)$, 故 $\tilde{f}$ 单, 从而 $\tilde{f}$ 是同构. 因此由命题 7.5 知投射盖是唯一的.

若满同态 $f: P \to M$ 诱导出的模同态 $\tilde{f}: P/\mathrm{rad}(P) \longrightarrow M/\mathrm{rad}(M)$ 是同构, 则 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}(P)$, 即 P 是 M 的投射盖. 这就证明了 (i) 和 (ii).

(iii) 设 $g: Q \to M$ 是满同态, Q 是投射模. 设 $f: P(M) \to M$ 是满同态且 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}P(M)$. 由 Q 的投射性知存在模同态 $\varphi: Q \to P(M)$ 使得 $g = f\varphi$. 因 g 满, 故 $\tilde{g}: Q/\mathrm{rad}(Q) \longrightarrow M/\mathrm{rad}(M)$ 满, 而由 (ii) 知 $P(M)/\mathrm{rad}P(M) \overset{\tilde{f}}{\cong} M/\mathrm{rad}(M)$, 故 $\tilde{\varphi}: Q/\mathrm{rad}(Q) \longrightarrow P(M)/\mathrm{rad}P(M)$ 满. 从而 φ 满 (Nakayama 引理), 故 $P(M)$ 是 Q 的直和项. □

7.8 推论 (i) $P(M) \cong P(\overline{M})$, 其中 $\overline{M} = M/\mathrm{rad}(M)$.

(ii) $P(M \oplus N) \cong P(M) \oplus P(N)$.

证　(i) 由定理 7.7(ii) 知

$$P(M)/\mathrm{rad}P(M) \cong M/\mathrm{rad}(M) = \overline{M}/\mathrm{rad}(\overline{M})$$
$$\cong P(\overline{M})/\mathrm{rad}P(\overline{M}).$$

从而由命题 7.5 知 $P(M) \cong P(\overline{M})$.

(ii) 设 $f: P(M) \longrightarrow M$ 和 $g: P(N) \longrightarrow N$ 是满同态且 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}P(M)$, $\mathrm{Ker}g \subseteq \mathrm{rad}P(N)$. 则有满同态 $f \oplus g: P(M) \oplus P(N) \longrightarrow M \oplus N$, 且

$$\mathrm{Ker}(f \oplus g) = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Ker}g \subseteq \mathrm{rad}P(M) \oplus \mathrm{rad}P(N)$$
$$= \mathrm{rad}(P(M) \oplus P(N)),$$

故 $P(M) \oplus P(N)$ 是 $M \oplus N$ 的投射盖. □

下面要研究的另一特殊的模类是内射模, 它是投射模的对偶.

7.9　定义　A- 模 I 称为内射模, 如果对于任一单同态 $i: M \to N$ 和任一模同态 $f: M \to I$, 均存在模同态 $g: N \to I$ 使得 $f = gi$. 此时称 g 为 f 的拓展. 用交换图表达就是

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & N \\ f\downarrow & \swarrow g & \\ I & & \end{array}$$

命题　模 I 是内射模当且仅当 $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ 是正合函子.

将定理 7.3 的证明对偶化, 即可得到

7.10　定理　下述命题等价:

(i) I 是内射模.

(ii) 任一正合列 $0 \longrightarrow I \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是可裂正合列.

(iii) 设 $i: I\to N$ 是任一单同态，则 I 是 N 的一个直和项.

7.11 定理(Baer 判别法) 左模 I 是内射模当且仅当任一模同态 $L\longrightarrow I$ 能拓展成 A 到 I 的模同态，其中 L 是 A 的任一左理想.

证 必要性显然.

设 $i: M\to N$ 是任一单同态， $f: M\to I$ 是任一模同态. 要证 f 能被拓展成 N 到 I 的模同态. 将 M 视为 N 的子模. 令

$$\Omega=\{(g,N')\mid M\subseteq N'\subseteq N,\ g:\ N'\to I\text{是模同态且}g|_M=f\}.$$

则 $(f,M)\in\Omega$. 定义 Ω 中的偏序 $\geq$ 如下：

$$(g_1,N_1')\geq(g_2,N_2')\iff N_1'\supseteq N_2',\ g_1|_{N_2'}=g_2.$$

因 N 为有限维， Ω 中必存在一个关于此序的极大元 (g,N'). 我们断言 $N'=N$, 从而充分性获证.

否则，存在 $x\in N,x\notin N'$, 从而 $Ax+N'$ 是 N 的真包含 N' 的子模. 令

$$L=\{s\in A\mid sx\in N'\}.$$

则 L 是 A 的左理想. 令 $h: L\to I$, 其中 $h(s)=g(sx)$. 由题设 h 可被拓展成 A 到 I 的模同态 k.

令

$$\begin{aligned}\pi: Ax+N' &\longrightarrow I,\\ ax+y &\longmapsto k(a)+g(y).\end{aligned}$$

则 π 是有定义的. (若 $ax+y=0$, 其中 $a\in A$, $y\in N'$, 则 $a\in L$. 从而 $k(a)=h(a)=g(ax)=-g(y)$, 即 $k(a)+g(y)=0$. 这就推出 π 是有定义的.)

显然 π 是 A- 模同态，且 $\pi|_{N'} = g$. 这与 (g, N') 是 Ω 中的极大元不合. □

7.12　为了更精确地描述投射模与内射模的对偶原则，我们引进对偶函子 $\mathrm{Hom}_F(-, F)$.

对于任一左 A 模 M, 定义

$$M^* = \mathrm{Hom}_F(M, F).$$

则 M^* 是右 A- 模，其中

$$(fa)(m) = f(am), \quad \forall a \in A, f \in M^*, m \in M.$$

对于左 A- 模同态 $\varphi: M \to N$. 定义 $\varphi^*: N^* \to M^*$ 为

$$\varphi^*(f)(m) = f(\varphi(m)), \quad \forall f \in N^*, m \in M.$$

则 φ^* 是右 A- 模同态，并且

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*; \quad 1^* = 1.$$

由此可知函子 $\mathrm{Hom}_F(-, F)$ 是左 A- 模范畴到右 A- 模范畴的反变函子, 而且 $\mathrm{Hom}_F(-, F)$ 是正合函子, 即若 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ 正合, 则 $0 \longrightarrow N^* \xrightarrow{g^*} L^* \xrightarrow{f^*} M^* \longrightarrow 0$ 也正合.

同理， $\mathrm{Hom}_F(-, F)$ 也是右 A- 模范畴到左 A- 模范畴的反变函子. 因为 M 是有限维空间, 故有模同构 (对于左 A- 模 M 和右 A- 模 M 均成立)

$$M \cong (M^*)^*,$$

其中将 $m \in M$ 对应到线性函数 $\delta(m): M^* \to F$, 这里 $\delta(m)(f) = f(m)$, $\forall f \in M^*, m \in M$. 特别地， $M = 0 \Leftrightarrow M^* = 0$.

7.13 引理 (i) 模 P 投射 $\Leftrightarrow$ P^* 内射 (注意, 若 P 是左 A- 模, 则 P^* 是右 A- 模).

(ii) $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ 是内射模当且仅当 Q_i 均为内射模.

(iii) 模 S 是单模当且仅当 S^* 是单模.

(iv) 设 N 是 M 的子模, 则 N^* 是 M^* 的商模.

(v) $(M/N)^* = \{f \in M^* \mid f(N) = 0\}$, 将 $(M/N)^*$ 记为 $N^\perp$.

(vi) 对于 M 的子模 N_1, N_2 有

$$(N_1 + N_2)^\perp = N_1^\perp \cap N_2^\perp,$$
$$(N_1 \cap N_2)^\perp = N_1^\perp + N_2^\perp.$$

证明留作习题.

7.14 因 $\mathrm{rad}(M)$ 是 M 的所有极大子模的交, 故 $\mathrm{rad}(M)^\perp = (M/\mathrm{rad}(M))^*$ 是 M^* 的极小子模的和.

定义 设 M 是任一模, M 的所有单子模的和称为 M 的基座, 记为 $\mathrm{soc}(M)$.

由定义知

$$\mathrm{soc}(M^*) = (\mathrm{rad}(M))^\perp = (M/\mathrm{rad}(M))^*.$$

引理 $\mathrm{soc}(M) = \{m \in M \mid \mathrm{rad}(A) \cdot m = 0\}$.

证 设 S 是 M 的任一单子模. 则 $\mathrm{rad}(A)S = \mathrm{rad}(S) = 0$. 从而

$$\mathrm{soc}(M) \subseteq \{m \in M \mid \mathrm{rad}(A) \cdot m = 0\}.$$

反之, 若 $\mathrm{rad}(A) \cdot m = 0$, 则 Am 是 $A/\mathrm{rad}(A)$ 上的模, 故 Am 是单 A- 模的直和, 从而 $Am \subseteq \mathrm{soc}(M)$. 这就完成了证明. □

将命题 7.5 和定理 7.6 对偶化, 我们得到

7.15　定理　(i) 设 Q, Q' 均为内射模. 则 $Q \cong Q'$ 当且仅当

$$\mathrm{soc}(Q) \cong \mathrm{soc}(Q').$$

(ii) $Q \longmapsto \mathrm{soc}(Q)$ 给出了所有互不同构的不可分解内射模的集合到单 A- 模的集合的一一对应, 从而 $\mathrm{soc}(Q)$ 是 Q 的唯一单子模.

(iii) 任一内射模均是 A^* 的直和项.

证　(i) $Q \cong Q'$ 当且仅当 $Q^* \cong Q'^*$, 由命题 7.5 知, 当且仅当

$$Q^*/\mathrm{rad}(Q^*) \cong Q'^*/\mathrm{rad}(Q'^*).$$

而

$$\mathrm{soc}(Q) = \mathrm{soc}((Q^*)^*) = (Q^*/\mathrm{rad}(Q^*))^*,$$

从而 $Q \cong Q'$ 当且仅当 $\mathrm{soc}(Q) \cong \mathrm{soc}(Q')$.

(ii) 首先, 若 Q 是不可分解内射模, 则 $\mathrm{soc}(Q) = \mathrm{soc}((Q^*)^*) = (Q^*/\mathrm{rad}(Q^*))^*$ 是单模.

设 S 是任一单 A- 模, 则 S^* 单. 由定理 7.6 知存在不可分解投射模 P 使得 $S^* \cong P/\mathrm{rad}(P)$. 取 $Q = P^*$, 则 Q 是不可分解内射模. 故

$$\begin{aligned}\mathrm{soc}(Q) &= \mathrm{soc}((Q^*)^*) = (Q^*/\mathrm{rad}(Q^*))^* \\ &= (P/\mathrm{rad}(P))^* \cong S.\end{aligned}$$

再由 (i) 即证得 (ii).

(iii) 将定理 7.6(ii) 对偶化即得. □

7.16　定义　内射模 Q 称为模 M 的内射包, 如果有单同态 $\varphi: M \to Q$, 使得 $\mathrm{soc}(Q) \subseteq \mathrm{Im}\varphi$(或等价地, 对于 Q 的任一子模 X, 从 $\mathrm{Im}\varphi \cap X = 0$ 可推出 $X = 0$).

将定理 7.7 和推论 7.8 对偶化，即可得到如下定理：

定理 (i) 若 P 是 M 的投射盖，则 P^* 是 M^* 的内射包；反之亦然.

(ii) 任一模 M 的内射包总存在且唯一 (在同构意义下)，记为 $Q(M)$.

(iii) $Q(M) \cong Q(\mathrm{soc}(M))$.

(iv) $Q(M_1 \oplus M_2) \cong Q(M_1) \oplus Q(M_2)$.

(v) 若 ψ：$M \to Q$ 是单同态，Q 是内射模，则 $Q(M)$ 是 Q 的直和项.

证明细节留作习题.

习 题

1. 证明 $P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ 是投射模当且仅当每个 P_i 均为投射模.

2. 设 $e^2 = e \in A$. 则 Ae 是投射模.

3. 证明 A 是半单代数当且仅当任一 A- 模均为投射模.

4. 证明引理 7.13.

5. 证明定理 7.16.

§8 模在代数上的张量积

在 I.3.3 中我们讨论了向量空间的张量积，本节进一步研究模在代数上的张量积.

8.1 首先考虑两个 F- 代数 A, B 在 F 上的张量积. 设 $\{a_i \mid i \in I\}$ 和 $\{b_j \mid j \in J\}$ 分别是 A 与 B 的一组基. 则 $\{a_i \otimes b_j \mid i \in I, j \in J\}$ 是 $A \otimes B = A \otimes_F B$ 的一组基. 定义 $(a_i \otimes b_j)(a_{i'} \otimes b_{j'}) = (a_i a_{i'}) \otimes$

$(b_j b_{j'})$. $i, i' \in I$, $j, j' \in J$, 并将这个乘法 F- 双线性地扩充为 $A \otimes B$ 中的乘法. 直接验证 $A \otimes B$ 也成为 F- 代数, 称为代数 A 与 B 的张量积. 特别地, 若 K 是 F 的扩域, 则 $K \otimes_F B$ 与 $A \otimes_F K$ 还成为 K- 代数.

8.2 设 A 是 F- 代数, M_A 是右 A- 模, ${}_AN$ 是左 A- 模, V 是任一 F- 向量空间. F- 双线性映射 $f: M \times N \to V$ 称为 A- 平衡映射, 如果

$$f((ma, n)) = f((m, an)), \quad \forall a \in A, m \in M, n \in N.$$

定义 F- 向量空间 W 称为 M_A 与 ${}_AN$ 在代数 A 上的张量积, 如果存在具有泛性质的 A- 平衡映射 $\eta: M \times N \to W$. 这就是说, 对于任一 A- 平衡映射 $f: M \times N \to V$, 均存在唯一的 F- 线性映射 $\tilde{f}: W \to V$ 满足 $f = \tilde{f}\eta$.

类似于 I.3.3.1 中的说明, 易推出: 若存在 M_A 与 ${}_AN$ 在 A 上的张量积, 则它一定是唯一的. 至于 M_A 与 ${}_AN$ 在 A 上的张量积的存在性可以构造性地给出. 考虑 M 与 N 在域 F 上的张量积 $M \otimes_F N$ 中所有形如

$$ma \otimes n - m \otimes an, \forall m \in M, n \in N, a \in A$$

的元素张成的子空间 T. 则商空间 $(M \otimes_F N)/T$ 就是 M_A 与 ${}_AN$ 在 A 上的张量积, 记为 $M \otimes_A N$.

(事实上, 令 $\otimes_A$ 是映射 $\otimes_F: M \times N \to M \otimes_F N$ 与自然满射 $\pi: M \otimes_F N \to (M \otimes_F N)/T$ 的合成. 则由 $\otimes_F$ 是具有泛性质的 F-双线性映射这个事实知 $\otimes_A: M \times N \to M \otimes_A N$ 是具有泛性质的 A- 平衡映射, 其中 $\otimes_A$ 将 (m, n) 映到 $m \otimes_A n := (m \otimes_F n) + T$.)

在不引起混淆的情况下, 也将 $m \otimes_A n$ 简记成 $m \otimes n$. 根据定义, 在 $M \otimes_A N$ 中显然成立 $ma \otimes_A n = m \otimes_A an$.

注意到 $M\otimes_A N$ 中任一元素可表示成有限和 $\sum_i m_i\otimes_A n_i$, $m_i\in M, n_i\in N$, 但未必能写成 $m\otimes_A n$ 的形式，而且这种表示法也不是唯一的.

8.3 设 ${}_AN_B$ 是 A-B- 双模. 则 $M\otimes_A N$ 还可以自然地作成右 B-模. 事实上，对于任一 $b\in B$, 定义 $f: M\times N\to M\otimes_A N: f((m,n)) = m\otimes nb$. 则 f 是 A- 平衡映射，故由 $\otimes_A$ 的泛性质即得到唯一的 F- 线性映射 $M\otimes_A N\to M\otimes_A N$, 将 $m\otimes n$ 送到 $m\otimes nb$. 这样， $M\otimes_A N$ 就作成了右 B- 模.

类似地, 若 ${}_BM_A$ 是 B-A- 双模, 则 $M\otimes_A N$ 可成为左 B- 模, 其中 $b(m\otimes n) = bm\otimes n$. 若 ${}_BM_A$ 是 B-A- 双模， ${}_AN_C$ 是 A-C- 双模，则 $M\otimes_A N$ 可成为 B-C- 双模，其中

$$b(m\otimes n)c = (bm)\otimes(nc), \quad \forall b\in B, c\in C, m\in M, n\in N.$$

注 设 M,N 均为群 G 的 F- 表示， $A=FG$. 由上述讨论知 $M\otimes_F N$ 有左 A- 模结构，其中 $a(m\otimes n) = am\otimes n$, $\forall a\in A, m\in M, n\in N$.

另一方面，在 I.3.3.3 中已定义了 $M\otimes_F N$ 上 G 的 F- 表示结构，相应的左 A- 模满足

$$\sum_{g\in G}\lambda_g g(m\otimes n) = \sum_{g\in G}\lambda_g(gm\otimes gn).$$

这是在同一 F- 空间 $M\otimes_F N$ 上的两个不同的 A- 模结构.

以后，“条件 ${}_AM_B$” 指 M 是 A-B- 双模.

命题(结合律) 在条件 $M_A, {}_AN_B, {}_BL$ 下存在唯一 F- 同构

$$(M\otimes_A N)\otimes_B L\simeq M\otimes_A(N\otimes_B L)$$

将 $(m\otimes n)\otimes l$ 送到 $m\otimes(n\otimes l)$.

若还有条件 ${}_CM_A$, ${}_BL_D$, 则上述 F- 同构还是 C-D- 双模同构.

证 对于 $l\in L$, 定义 $f_l:\ M\times N\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$ 是将 (m,n) 送到 $m\otimes(n\otimes l)$ 的 A- 平衡映射, 由 $\otimes_A$ 的泛性质知存在唯一的 F-线性映射 $\tilde f_l:\ M\otimes_A N\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$, 将 $m\otimes n$ 映到 $m\otimes(n\otimes l)$. 这样就得到 B- 平衡映射 $f:\ (M\otimes_A N)\times L\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$, 将 $(m\otimes n,l)$ 送到 $m\otimes(n\otimes l)$. 再由 $\otimes_B$ 的泛性质就得到唯一的 F-线性映射 $f:\ (M\otimes_A N)\otimes_B L\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$, 将 $(m\otimes n)\otimes l$ 送到 $m\otimes(n\otimes l)$.

类似地可建立 F- 线性映射 $g:\ M\otimes_A(N\otimes_B L)\to(M\otimes_A N)\otimes_B L$, 将 $m\otimes(n\otimes l)$ 送到 $(m\otimes n)\otimes l$. 显然 f 与 g 是互逆的映射. □

在条件 ${}_CM_A$, ${}_AN_B$, L_B 下, $\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A N,L)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_B(N,L))$ 均成为右 C- 模.

8.4 命题(伴随对) 在条件 M_A, ${}_AN_B$, L_B 下存在唯一 F- 同构

$$\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A N,L)\simeq\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_B(N,L)),$$

将右 B- 模同态 $\varphi:\ M\otimes_A N\to L$ 映到右 A- 模同态 $\overline{\varphi}:\ M\to\mathrm{Hom}_B(N,L)$, 其中 $\overline{\varphi}(m)(n)=\varphi(m\otimes n)$.

若 ${}_CM_A$ 还是 C-A- 双模, 则上述 F- 同构是右 C- 模同构.

证 直接验证 $\overline{\varphi}$ 是 A- 模同态.

令 $\psi\in\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,L))$. 则将 (m,n) 映到 $\psi(m)(n)$ 是 $M\times N$ 到 L 的 A- 平衡映射, 从而由 $\otimes_A$ 的泛性质知存在唯一 F-线性映射 $\overline{\psi}:\ M\otimes_A N\to L$, 使得 $\overline{\psi}(m\otimes n)=\psi(m)(n)$. 直接验证可知 $\overline{\psi}$ 还是右 B- 模同态, 即 $\overline{\psi}\in\mathrm{Hom}_B(M\otimes N,L)$. 由此得到的两个 F- 线性映射

$$\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A N,L)\ \rightleftharpoons\ \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_B(N,L))$$

是互逆的.

若 M 是 C-A- 双模，则直接验证上述同构是右 C- 模同构.

□

模的张量积与模同态有如下关系:

8.5 命题 设 $f: M_A \to M'_A$ 是右 A- 模同态， $g: {}_AN \to {}_AN'$ 是左 A- 模同态. 则存在唯一的 F- 线性映射 $f \otimes g: M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ 使得

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

若 $f: {}_BM_A \to {}_BM'_A$ 还是 B-A- 双模同态，则 $f \otimes g$ 还是左 B- 模同态.

证 令 $\varphi: M \times N \to M' \otimes_A N'$ 是将 (m,n) 映到 $f(m) \otimes g(n)$ 的映射. 显然 φ 是 A- 平衡映射，从而由 $\otimes_A$ 的泛性质知存在唯一的 F- 线性映射 $f \otimes g$ 使得

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = \varphi((m,n)) = f(m) \otimes g(n).$$

若 f 还是 B-A- 双模同态，则易见 $f \otimes g$ 亦是左 B- 模同态.

□

模的张量积与模的直和有如下关系:

8.6 命题 设 $M_A = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$, 其中 M_i 均为右 A- 模. 则有 F- 线性同构

$$M \otimes_A N \cong (M_1 \otimes_A N) \oplus \cdots \oplus (M_t \otimes_A N).$$

若 M_i 均为 B-A- 双模，则上述 F- 同构还是 B- 模同构.

证　不妨将 M_i 视为 M 的子模. 考虑映射 $\varphi: M\times N\to(M_1\otimes_A N)\oplus\cdots\oplus(M_t\otimes_A N)$, φ 将 $M\times N$ 中任一元 $(m_1+\cdots+m_t, n)$, 其中 $m_i\in M_i, n\in N$, 映到 $(m_1\otimes n)+\cdots+(m_t\otimes n)$. 则 φ 是 A-平衡映射, 故存在 F- 线性映射 $\widetilde{\varphi}: M\otimes_A N\to(M_1\otimes_A N)\oplus\cdots\oplus(M_t\otimes_A N)$ 使得

$$\widetilde{\varphi}((m_1+\cdots+m_t)\otimes n)=(m_1\otimes n)+\cdots+(m_t\otimes n).$$

同理, 可以得到 F- 线性映射 $\widetilde{\psi}_i: M_i\otimes_A N\to M\otimes_A N$, 使得 $\widetilde{\psi}_i(m_i\otimes n)=m_i\otimes n$, 其中 $m_i\in M_i$. 于是有 F- 线性映射

$$\widetilde{\psi}:\ (M_1\otimes_A N)\oplus\cdots\oplus(M_t\otimes_A N)\to M\otimes_A N$$

使得

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}((m_1\otimes n)+\cdots+(m_t\otimes n))&=\widetilde{\psi}_1(m_1\otimes n)+\cdots+\widetilde{\psi}_t(m_t\otimes n)\\&=m_1\otimes n+\cdots+m_t\otimes n\\&=(m_1+\cdots+m_t)\otimes n.\end{aligned}$$

显然 $\widetilde{\varphi}$ 与 $\widetilde{\psi}$ 是互逆的. □

以后会经常用到如下事实:

8.7　引理　(i) 设 M 是左 A- 模. 则有左 A- 模同构

$$A\otimes_A M\simeq {}_AM,$$

将 $a\otimes m$ 映到 am.

(ii) 设 N 是右 A- 模. 则有右 A- 模同构

$$N\otimes_A A\simeq N_A,$$

将 $n \otimes a$ 映到 na.

证 (i) 显然, 将 (a,m) 映到 am 的映射 $A \times M \to M$ 是 A-平衡映射, 从而由 $\otimes_A$ 的泛性质得到 F- 线性映射 $A \otimes_A M \to M$, 它将 $a \otimes m$ 映到 am; 这个映射与映射 $M \to A \otimes_A M$, 其中 m 被映到 $1 \otimes_A m$ 是互逆的. 这就证明了 F- 同构 $A \otimes_A M \simeq M$, 它显然还是左 A- 模同态.

(ii) 同理可证. □

在命题 8.3~8.6 中令 $A = F$, 则立即得到域 F 上张量积的性质, 这也是我们没有在 I.3.3.1 中讨论向量空间张量积性质的原因.

8.8 对于任一右 A- 模 M_A, 我们得到左 A- 模范畴 A-mod 到左 F- 模范畴 F-mod 的张量函子 $M \otimes_A -$: 它将每一左 A- 模 N 映到 $M \otimes_A N$; 将每一左 A 模同态 $f: N \to N'$ 映到 $M \otimes_A f = 1 \otimes f: M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N'$. 同样, 对于任一左 A- 模 ${}_AN$, 我们得到右 A- 模范畴 mod-A 到右 F- 模范畴 F-mod 的张量函子 $- \otimes_A N$. 这两个函子均是共变函子.

定理 函子 $M \otimes_A -$ 与 $- \otimes_A N$ 均是右正合函子.

证 只证 $M \otimes_A -$ 是右正合函子. $- \otimes_A N$ 的右正合性同法可证.

设 $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ 是左 A- 模正合列. 欲证

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{1\otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{1\otimes g} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

也正合.

因 $M \otimes_A N''$ 中任一元均可写成形如有限和 $\sum_i m_i \otimes g(n_i)$, $m_i \in M, n_i \in N$, 故 $1 \otimes g$ 是满射. 因此只要证 $\mathrm{Im}(1 \otimes f) = \mathrm{Ker}(1 \otimes g)$. 因为 $gf = 0$, 故 $(1 \otimes f)(1 \otimes g) = 0$, 即 $\mathrm{Im}(1 \otimes f) \subseteq \mathrm{Ker}(1 \otimes g)$. 从

而得到 F- 线性满射 $\theta:\ (M\otimes_A N)/\mathrm{Im}(1\otimes f)\ \longrightarrow\ M\otimes_A N''$ 使得

$$\theta(m\otimes n+\mathrm{Im}(1\otimes f))=m\otimes g(n).$$

现在只要证明 θ 是同构即可.

设 $m\in M, n''\in N''$. 取 $n\in N$ 使得 $n''=g(n)$. 则不难看出 $(M\otimes_A N)/\mathrm{Im}(1\otimes f)$ 中的元 $m\otimes n+\mathrm{Im}(1\otimes f)$ 与 n 的选取无关.

(事实上, 若 $n_1,n_2\in N$ 使得 $g(n_1)=n''=g(n_2)$. 则 $n_1-n_2\in\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Im}f$, 故有 $n_1-n_2=f(n')$, $n'\in N'$. 从而

$$m\otimes n_1+\mathrm{Im}(1\otimes f)=m\otimes n_2+\mathrm{Im}(1\otimes f).\quad)$$

定义 F- 双线性映射 $M\times N''\ \longrightarrow\ (M\otimes_A N)/\mathrm{Im}(1\otimes f)$, 使得

$$(m,n'')\ \longrightarrow\ m\otimes n+\mathrm{Im}(1\otimes f),$$

其中 $g(n)=n''$. 这是一个 A- 平衡映射, 从而得到 F- 线性映射

$$\theta':\ M\otimes_A N''\ \longrightarrow\ (M_A\otimes N)/\mathrm{Im}(1\otimes f),$$

使得

$$\theta'(m\otimes n'')=m\otimes n+\mathrm{Im}(1\otimes f),$$

其中 $g(n)=n''$. 直接验证 $\theta\theta'$ 和 $\theta'\theta$ 分别在 $M\otimes_A N''$ 和 $(M\otimes_A N)/\mathrm{Im}(1\otimes f)$ 的生成元上的值, 即可看出

$$\theta\theta'=1,\quad \theta'\theta=1.$$ □

8.9　定义　右 A- 模 M 称为平坦模, 如果对于任一左 A- 模单同态 $f:\ N'\ \longrightarrow\ N$, 我们有单 F- 线性映射

$$1\otimes f:\ M\otimes_A N'\ \longrightarrow\ M\otimes_A N.$$

类似地, 可定义左平坦模的概念. 由定理 8.8 立即得到

命题 (i) 右 A- 模 M 是平坦模当且仅当张量函子 $M\otimes_A -$ 是正合函子.

(ii) 左 A- 模 N 是平坦模当且仅当张量函子 $-\otimes_A N$ 是正合函子.

8.10 命题 $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n$ 是平坦模当且仅当每个 M_i 均为平坦模.

证 设 $f: N\to N'$ 是任一左 A- 模单同态. 只要证明 $1\otimes f: M\otimes_A N \longrightarrow M\otimes_A N'$ 是单射当且仅当每个 $1\otimes f_i: M_i\otimes_A N \longrightarrow M_i\otimes_A N'$ 是单射.

由命题 8.6 知存在 F- 同构 η_N 与 $\eta_{N'}$:

$$\eta_N: M\otimes_A N \longrightarrow (M_1\otimes_A N)\oplus\cdots\oplus(M_n\otimes_A N),$$

$$\eta_{N'}: M\otimes_A N' \longrightarrow (M_1\otimes_A N')\oplus\cdots\oplus(M_n\otimes_A N'),$$

满足 $\eta_{N'}(1\otimes f) \longrightarrow \bigoplus\limits_{i=1}^{n}(1\otimes f_i)\eta_N$. 因此只要证

$$\bigoplus_{i=1}^{n}(1\otimes f_i): \bigoplus_{i=1}^{n}(M_i\otimes_A N) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n}(M_i\otimes_A N')$$

是单射当且仅当每个 $1\otimes f_i$ 是单射, 而由 $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}(1\otimes f_i)$ 的定义这是显然的. □

8.11 推论 投射模是平坦模.

证 首先, 右正则模 A_A 是平坦模, 这由引理 8.7 立即可得. 其次, 自由模是平坦模, 因为自由模形如 nA, 由命题 8.10 即知. 而投射模是自由模的直和项, 从而由命题 8.10 即证得. □

习 题

1. 设 $f: M_A\to M'_A$ 和 $f': M'_A\to M''_A$ 是右 A- 模同

态，$g: {}_AN \to {}_AN'$ 和 $g': {}_AN' \to {}_AN''$ 是左 A- 模同态. 则 $(f'\otimes g')(f\otimes g): M\otimes_A N \to M''\otimes_A N''$ 是 F- 线性映射，且

$$(f'\otimes g')(f\otimes g) = (f'f)\otimes(g'g).$$

进一步，若 f 和 f' 还是 B-A- 双模同态，则 $(f'\otimes g')(f\otimes g)$ 还是左 B- 模同态.

2. 对于代数 A 与 B 的张量积写出与命题 8.3、命题 8.5 和命题 8.6 相应的结论，并证明之.

3. (伴随对) 在条件 ${}_BM_A$, ${}_AN$, ${}_BL$ 下存在唯一的 F- 同构

$$\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A N,\ L) \cong \mathrm{Hom}_A(N,\ \mathrm{Hom}_B(M,\ L)),$$

将右 B- 模同态 $\varphi: M\otimes_A N \longrightarrow L$ 映到右 A- 模同态 $\overline{\varphi}: N \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M,\ L)$, 其中 $\overline{\varphi}(n)(m) = \varphi(m\otimes n)$.

若还有条件 ${}_BL_C$, 则上述 F- 同构还是 C- 模同构.

§9 绝对单模与分裂域

本节中总设 A 是有限维 F- 代数，K 是 F 的扩域.

9.1 设 V 是 F- 向量空间. 定义 $V^K := K\otimes_F V$. 因为 K 可视为 K-F- 双模，故 V^K 是 K- 向量空间. 设 $\dim_F V = n$. 则

$$\begin{aligned} V^K &= K\otimes_F (F\oplus\cdots\oplus F) \\ &\cong (K\otimes_F F)\oplus\cdots\oplus(K\otimes_F F) \\ &\cong K\oplus\cdots\oplus K, \end{aligned}$$

即 $\dim_K V^K = n = \dim_F V$. 设 $v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的一组 F- 基. 则 $1\otimes v_1,\cdots,1\otimes v_n$ 是 V^K 的一组 K- 基.

定义 $A^K := K \otimes_F A$. 则 A^K 作成 K- 代数且 $\dim_K A^K = \dim_F A$.

设 M 是左 A- 模. 则 M^K 是左 A^K- 模, 满足

$$(k \otimes a)(k' \otimes m) = kk' \otimes am, \quad \forall k, k' \in K,\ a \in A, m \in M.$$

因此, 对任一 $a \in A$, a 作为 M 的线性变换在基 $m_1, \cdots, m_r$ 下的矩阵与 $1 \otimes a$ 作为 M^K 的线性变换在基 $1 \otimes m_1, \cdots, 1 \otimes m_r$ 下的矩阵完全相同.

特别地, 若 $A \cong FG$ 是群代数, 则 $A^K = KG$; 若 (M, ρ) 是 G 的 F- 表示, 则 (M^K, ρ^K) 是 G 的 K- 表示; 对 $g \in G$, $\rho(g)$ 在 M 的基 $m_1, \cdots, m_r$ 下的矩阵与 $\rho^K(g)$ 在 M^K 的基 $1 \otimes m_1, \cdots, 1 \otimes m_r$ 下的矩阵完全相同. 从而 ρ 的 F- 特征标与 ρ^K 的 K- 特征标在 G 上的值完全相同.

若 M^K 是单 A^K- 模, 则 M 一定是单 A- 模, 反之未必.

例 令 A 是 4 阶循环群 $\mathbf{Z}_4$ 在 $\mathbf{R}$ 上的群代数, $M = \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e_2$, 其中 $\mathbf{Z}_4$ 的生成元 $\bar{1}$ 在 M 上的作用由矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

给出. 由于此矩阵的特征多项式 $\lambda^2 + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上不可约, 故 M 是单 A- 模. 但 $M^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}e_1 \oplus \mathbf{C}e_2$ 却是 $A^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Z}_4$ 上的非单模. 事实上, $M^{\mathbf{C}}$ 有子模的直和分解, $M^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}(\mathrm{e}_1 + \mathrm{i}\mathrm{e}_2) \oplus \mathbf{C}(\mathrm{e}_1 - \mathrm{i}\mathrm{e}_2)$.

这表明同一个群在不同的扩域上的表示性质可以很不相同. 一个自然的问题是, 若 M 是单 A- 模, 在什么条件下 M^K 也是单 A^K- 模?

9.2 引理 对于 A- 模 M 和 N, 存在 K- 空间的同构

$$\mathrm{Hom}_{A^K}(M^K, N^K) \cong K \otimes_F \mathrm{Hom}_A(M, N).$$

特别地，$\dim_K \mathrm{End}_{A^K}(M^K) = \dim_F \mathrm{End}_A(M)$.

证　K- 向量空间 $K\otimes_F \mathrm{Hom}_A(M,N)$ 中元等同于 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 中元的 K- 线性组合，因此可自然地视为 $\mathrm{Hom}_{A^K}(M^K,N^K)$ 中元. 在这种等同下，$K\otimes_F \mathrm{Hom}_A(M,N)$ 中元 $k\otimes f$ 被看成 A^K- 模同态：$(k\otimes f)(k'\otimes m) = kk'\otimes f(m)$. 因此，将 $K\otimes_F \mathrm{Hom}_A(M,N)$ 视为 $\mathrm{Hom}_{A^K}(M^K,N^K)$ 的 K- 子空间.

另一方面，设 $\psi\in \mathrm{Hom}_{A^K}(M^K,N^K)$. 设 $\{m_i \mid 1\le i\le r\}$ 和 $\{n_j \mid 1\le j\le t\}$ 分别是 M 与 N 的一组 F- 基. 则 $\{1\otimes m_i \mid 1\le i\le r\}$ 和 $\{1\otimes n_j \mid 1\le j\le t\}$ 分别是 M^K 与 N^K 的一组 K- 基. 设

$$\psi(1\otimes m_i) = \sum_{1\le j\le t} a_{ij}(1\otimes n_j),\quad 1\le i\le r,\ a_{ij}\in K.$$

将 ψ 等同于 K 上 $r\times t$ 矩阵 $(a_{ij})_{r\times t}$. 因此可将 ψ 重写成 $\psi = \alpha_1\psi_1+\cdots+\alpha_m\psi_m$，其中 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 是 K 中 F- 线性无关的元，ψ_i 是 F 上的 $r\times t$ 矩阵. 下证 $\psi_i\in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, $1\le i\le m$.

对于任一 $a\in A$, 因 M^K,N^K 是 A^K- 模，$1\otimes a\in A^K$ 可视为 M^K,N^K 的 K- 线性变换，将线性变换 $1\otimes a$ 等同于其矩阵. 因 ψ 是 A^K- 模同态，故有 $\psi(1\otimes a) = (1\otimes a)\psi$. 从而

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(\psi_i a - a\psi_i) = 0.$$

因 $\alpha_i, i=1,\cdots,m$, 在 F 上线性无关，故 $\psi_i a - a\psi_i = 0$, $\forall a\in A$. 这表明 $\psi_i\in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. 于是 $\mathrm{Hom}_{A^K}(M^K,N^K)$ 恰为 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 中元的 K- 线性组合，从而引理得证. □

9.3　定义　单 A- 模 M 称为绝对单模，如果对 F 的任一扩域 K, M^K 均是单 A^K- 模.

9.4　设 M 是任一 A- 模，ρ 是其相应的代数同态. 对 $a\in A$, 定

义 $a_L \in \mathrm{End}_F(M)$, 其中 $a_L(m) = am$, $\forall m \in M$. 令 $A_L = \{a_L \mid a \in A\}$. 则 $A_L = \rho(A) \cong A/\mathrm{ann}(M)$, 且 M 是单 A- 模当且仅当 M 是单 A_L- 模.

下述定理给出了绝对单模的内在刻画, 这个刻画并不依赖于扩域.

定理 设 M 是单 A- 模. 则 M 绝对单当且仅当 $\mathrm{End}_A(M) = F1_M \cong F$.

证 设 M 绝对单. 取 K 是 F 的扩域且 K 是代数闭域. 则由引理 9.2 和 Schur 引理知

$$\dim_F \mathrm{End}_A(M) = \dim_K \mathrm{End}_{A^K}(M^K) = 1,$$

即 $\mathrm{End}_A(M) = F1_M \cong F$.

反之, 设 $\mathrm{End}_A(M) \cong F$. 因 M 单, 故 M 作为 A_L- 模亦单, 从而是 A_L 的忠实单模. 故由定理 5.10 知 A_L 是单代数. 因 $\mathrm{End}_{A_L}(M) \cong \mathrm{End}_A(M) \cong F$, 故由定理 4.7(iii) 知 $A_L = \rho(A) = M_n(F)$, 其中 $n = \dim_F M$. 因 M 是单 $M_n(F)$- 模, 故 M^K 是单 $M_n(K)$- 模. 注意到

$$\begin{aligned}(A^K)_L = (A_L)^K &= K \otimes_F M_n(F)\\ &\cong M_n(K \otimes_F F) = M_n(K),\end{aligned}$$

因此 M^K 是单 $(A^K)_L$- 模, 从而 M^K 是单 A^K- 模. □

9.5 定义 如果 $A^K/\mathrm{rad}(A^K) \cong M_{n_1}(K) \times \cdots \times M_{n_s}(K)$, 则称 K 是 A 的一个分裂域.

由定义知, 若 K 是 F 的扩域且 K 代数闭, 则 K 是 A 的分裂域.

定理 下述命题等价:

(i) K 是 A 的分裂域.

(ii) 任一单 A^K- 模均为绝对单模.

(iii) $\mathrm{End}_{A^K}(S) \cong K$, 其中 S 是任一单 A^K- 模.

证　(ii) 与 (iii) 的等价性由定理 9.4 保证.

(i) $\Rightarrow$ (iii): 设 S 是任一单 A^K- 模. 由定理 5.5(i) 知 S 是单 $A^K/\mathrm{rad}(A^K)$- 模, 由此由定理 4.7(i) 知 S 是某一单因子 $M_{n_i}(K)$-模, 从而由定理 4.7(ii) 知 $\mathrm{End}_{A^K}(S) \cong K$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 因 $A^K/\mathrm{rad}(A^K)$ 是半单代数, 故

$$A^K/\mathrm{rad}(A^K) \cong A_1 \times \cdots \times A_s, \quad A_i = M_{n_i}(D_i),$$

其中 $D_i \cong (\mathrm{End}_{A_i}(S_i))^{\mathrm{op}}$, S_i 是单 $M_{n_i}(D_i)$- 模, 当然也是单 A^K-模. 故由假设知 $D_i \cong (\mathrm{End}_{A^K}(S_i))^{\mathrm{op}} \cong K^{\mathrm{op}} = K$.　□

注　(i) 根据上述定理, 若任一单 A- 模 S 均为绝对单模, 即 $\mathrm{End}_A(S) \cong F$, 则 F 是 A 的分裂域, 反之亦然.

(ii) 设 G 是有限群. 在 I.4.6 中我们已定义 G 的分裂域的概念, 用本节的语言说就是: 域 F 是 G 的分裂域当且仅当 F 是群代数 FG 的分裂域.

9.6　设 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ 是 A- 模短正合列. 因 $K \otimes_F -$ 是正合函子, 故

$$0 \longrightarrow M^K \xrightarrow{1\otimes f} L^K \xrightarrow{1\otimes g} N^K \longrightarrow 0$$

是 A^K- 模短正合列. 根据 Jordan-Hölder 定理, 左正则 A- 模 ${}_AA$ 有合成列

$$A = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_t = (0),$$

其中 M_i/M_{i+1} 均为单 A- 模, $0 \le i \le t-1$. 因此有 A- 模的短正

合列

$$
\begin{aligned}
&0 \to \quad M_1 \to \quad A \to \quad A/M_1 \quad \to 0, \\
&0 \to \quad M_2 \to \quad M_1 \to \quad M_1/M_2 \quad \to 0, \\
&\cdots, \\
&0 \to \quad M_{t-2} \to \quad M_{t-1} \to \quad M_{t-1}/M_{t-2} \quad \to 0.
\end{aligned}
$$

从而对于 F 的扩域 K 得到 A^K- 模短正合列

$$
\begin{aligned}
&0 \to \quad M_1^K \to \quad A^K \to \quad (A/M_1)^K \quad \to 0, \\
&0 \to \quad M_2^K \to \quad M_1^K \to \quad (M_1/M_2)^K \quad \to 0, \\
&\cdots, \\
&0 \to \quad M_{t-2}^K \to \quad M_{t-1}^K \to \quad (M_{t-1}/M_{t-2})^K \quad \to 0.
\end{aligned}
$$

现在设 S 是任一单 A^K- 模. 则 $\mathrm{Hom}_{A^K}(A^K, S) \cong S \neq 0$. 由此可推出存在 $0 \leq i \leq t-1$, 使得 $\mathrm{Hom}_{A^K}((M_i/M_{i+1})^K, S) \neq 0$. 这就导出了如下引理:

9.7 引理 设 S 是单 A^K- 模. 则存在单 A- 模 U 使得

$$\mathrm{Hom}_{A^K}(U^K, S) \neq 0.$$

从而 S 是 U^K 的合成因子; 并且使得 S 是 U^K 的合成因子的单 A- 模 U 是唯一的.

证 因 $\mathrm{Hom}_{A^K}(U^K, S) \neq 0$, 故 S 是 U^K 的合成因子. 设有单 A- 模 U' 使得 S 是 $(U')^K$ 的合成因子且 $U' \not\cong U$. 则由定理 5.6 知存在 $b \in A$, 使得 b 在 U' 上的作用是恒等作用, 而 b 在 U 上的作用为零. 于是, $1 \otimes b$ 在 U'^K 上的作用是恒等作用, 而 $1 \otimes b$ 在 U^K 上的作用为零. 因为 S 是 U'^K 和 U^K 的合成因子, 从而 S 是 U'^K 和 U^K 的子模的商模, 故得到矛盾 $(1 \otimes b)S = S$, $(1 \otimes b)S = 0$. □

下述定理给出分裂域更本质的刻画，也回答了 9.1 中提出的问题.

9.8　定理　若 K 是 A 的分裂域，E 是 K 的任一扩域，则 E 也是 A 的分裂域，且全部单 A^E- 模恰为 $S_i^E = E \otimes_K S_i$，$1 \leq i \leq n$，其中 $S_1, \cdots, S_n$ 是全部的单 A^K- 模.

反之，若对 K 的任一扩域 E，全部单 A^E- 模恰为 $\{S^E | S$ 是单 A^K- 模$\}$，则 K 是 A 的分裂域.

证　设 K 是 A 的分裂域. 则由定理 9.5 以及

$$\begin{aligned} A^E &= E \otimes_F A \cong E \otimes_K (K \otimes_F A) \\ &= E \otimes_K A^K = (A^K)^E \end{aligned}$$

知 S_i^E 均为单 A^E- 模. 由引理 9.2 有

$$\dim_E \mathrm{Hom}_{A^E}(S_i^E, S_j^E) = \dim_K \mathrm{Hom}_{A^K}(S_i, S_j) = 0,\ i \neq j.$$

从而 $S_1^E, \cdots, S_n^E$ 互不同构. 设 S 是任一单 A^E- 模. 则由引理 9.7 知存在 S_i 使得 $\mathrm{Hom}_{A^E}(S_i^E, S) \neq 0$. 由 Schur 引理知 $S \cong S_i^E$. 最后

$$\dim_E \mathrm{End}_{A^E}(S_i^E) = \dim_K \mathrm{End}_{A^K}(S_i) = 1,$$

从而由定理 9.5 知 E 也是 A 的分裂域.

反之，设 E 是 K 的扩域且 E 是代数闭域. 则 E 是 A 的分裂域. 由假设 $\{S^E \mid S$ 是单 A^K- 模$\}$ 是全部单 A^E- 模，故由引理 9.2 及定理 9.5 知

$$\dim_K \mathrm{End}_{A^K}(S) = \dim_E \mathrm{End}_{A^E}(S^E) = 1.$$

从而由定理 9.5 知 K 是 A 的分裂域. □

9.9　推论　设 F 是有限群 G 的分裂域，K 是 F 的任一扩域.

则 K 也是 G 的分裂域，且 $\overline{\mathrm{Irr}}_K G = \{\rho^K \mid \rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G\}$.

9.10 推论 设 E 是 A 的分裂域，$F \subseteq K \subseteq E$. 则 K 是 A 的分裂域当且仅当全部单 A^E- 模为 $\{S^E \mid S$ 是单 A^K- 模 $\}$.

证 必要性由定理 9.8 即得. 反之，设全部单 A^E- 模为 $\{S^E \mid S$ 是单 A^K- 模 $\}$. 则

$$\dim_K \mathrm{End}_{A^K}(S) = \dim_E \mathrm{End}_{A^E}(S^E) = 1,$$

故 K 是 A 的分裂域. □

因 F 是有限群 G 的分裂域当且仅当 F 是群代数 FG 的分裂域，故有

9.11 推论 设 K 是 G 的分裂域，$F \subseteq K$. 则 F 是有限群 G 的分裂域当且仅当 $\overline{\mathrm{Irr}}_K G = \{\rho^K \mid \rho \in \overline{\mathrm{Irr}}_F G\}$.

9.12 命题 设 A 是有限维 F- 代数. 则存在 F 的有限扩域 K 使得 K 是 A 的分裂域.

证 设 $\overline{F}$ 是包含 F 的代数闭域. 则 $\overline{F}$ 是 A 的分裂域.

设 $(V_1, \rho_1), \cdots, (V_n, \rho_n)$ 是全部单 $A^{\overline{F}}$- 模，$\{a_1, \cdots, a_s\}$ 是 A 的一组 F- 基. 故 $\overline{F}$ 中只有有限个元作为矩阵 $\rho_i(a_j)$, $\forall\, 1 \le i \le n$, $1 \le j \le s$, 的系数出现，将这些元添加到 F 上，得到 F 的有限扩域 K. 从而 $(V_1, \rho_1), \cdots, (V_n, \rho_n)$ 均可视为单 A^K- 模. 因此由推论 9.10 知 $\overline{F}$ 的子域 K 也是 A 的分裂域. □

9.13 推论 对于有限群 G 和任一域 F, 存在 F 的有限扩域 K 使得 K 是 G 的分裂域.

习 题

1. 设 M, N 是 A- 模，K 是 F 的 n 次扩张. 证明 $M \cong N$ 当

且仅当 $M^K \cong N^K$. [提示：若 $M^K \cong N^K$，将 M^K 视为 A- 模，则有 A- 模同构 $M^K \cong nM$. 从而得到 A- 模同构 $nM \cong nN$. 再应用 Krull-Schmidt-Remak 定理.]

以下设 G 是有限群.

2. 设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 则 F 是 G 的分裂域当且仅当 G 的不可约 F- 表示的维数的平方和等于 $|G|$.

3. 设 K 是 G 的分裂域，$F \subseteq K$. 若对 G 的任一不可约 K- 表示 (S, ρ), 均存在 S 的一组 K- 基 B 使得矩阵 $\rho_B(g)$ 的元素均属于 F, $\forall g \in G$, 则 F 是 G 的分裂域.

4. 设 $\mathrm{char}F = 0$, ρ 是 G 的 F- 表示. 则 ρ 是绝对不可约 F- 表示当且仅当 $(\chi, \chi) = 1$, 其中 χ 是 ρ 的 F- 特征标.

§10　应用：常表示的不可约特征标

在定理 II.2.2 中我们看到，当 $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 且 F 是有限群 G 的分裂域时，G 的不可约 F- 表示由其特征标唯一确定，即若 ρ, ρ' 是 G 的不可约 F- 表示，χ, χ' 是其特征标，则 $\rho \cong \rho'$ 当且仅当 $\chi = \chi'$ (这一结论对 $\mathrm{char}F = 0$ 的域总正确，不需要 F 是 G 的分裂域这个条件). 在定理 II.3.2 中我们还知道，此时 $\mathrm{Irr}_F(G)$ 是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的一组基 (在 $\mathrm{char}F = 0$ 的条件下，$\mathrm{Irr}_F(G)$ 是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 中线性无关的子集). 自然的问题是将“F 是 G 的分裂域”去掉，上述结论是否成立？本节将利用前面的结果，对此给出肯定的回答 (定理 10.4).

10.1　域 F 的代数扩域 K 称为 F 的可分扩域，如果 K 中任一元 α 在 F 上的极小多项式在 F 的任一扩域中均无重根.

熟知，特征零的域的任一代数扩域均为可分扩域；有限域的任一有限扩域均为可分扩域.

10.2 引理 设 E 和 K 均为域 F 的扩域, 且 K 是 F 的有限可分扩域. 则 $E\otimes_F K$ 是 E 的有限可分扩域的直积.

证 因 $K|F$ 是有限可分扩域, 由域论知 K 是 F 的单扩域 $F(\alpha)$, 其中 α 是 F 上的可分元. 令 $p(x)$ 是 α 在 F 上的极小多项式. 因

$$E\otimes_F K=E\otimes_F F(\alpha)=E\otimes_F F[\alpha]=E[1\otimes_F\alpha],$$

故有 E- 代数满同态

$$\begin{aligned}\pi:E[x]&\longrightarrow E\otimes_F K=E[1\otimes_F\alpha],\\ f(x)&\longmapsto f(1\otimes_F\alpha),\ \forall f(x)\in E[x].\end{aligned}$$

则 $\mathrm{Ker}\pi=\langle m(x)\rangle$, $m(x)$ 是 $1\otimes_F\alpha$ 在 E 上的极小多项式. 因 $p(1\otimes\alpha)=1\otimes p(\alpha)=0$, 故 $m(x)|p(x)$. 因 $p(x)$ 在 F 的任一扩域中均无重根, 故 $m(x)=m_1(x)\cdots m_t(x)$, 其中 $m_i(x)$, $1\le i\le t$, 是 $E[x]$ 中两两互素的不可约多项式. 从而

$$E\otimes_F K\cong E[x]/\langle m(x)\rangle\cong E[x]/\langle m_1(x)\rangle\times\cdots\times E[x]/\langle m_t(x)\rangle.$$

因 $m_i(x)$ 无重根, 故每个直积因子 $E[x]/\langle m_i(x)\rangle$ 均是 E 上的有限可分扩域. □

10.3 引理 设 G 是有限群, $\mathrm{char}F=p>0$, $p\nmid|G|$, K 是 F 的扩域, $\rho\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G$. 则

$$\rho^K\cong\bigoplus_{1\le i\le t}\rho_i,$$

其中 $\rho_1,\cdots,\rho_t$ 是两两互不同构的 G 的不可约 K- 表示.

证 令 $k=\mathbf{Z}_p$. 因 $p\nmid|G|$, 故由 Maschke 定理和 Wedderburn-Artin 定理知

$$kG\cong M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_s}(D_s),$$

其中 D_i 是 k 上的有限维可除代数，从而由 Wedderburn 定理知 D_i 均为域. 因 D_i 是有限域，故由域论知 D_i 是 k 上的有限可分扩域. 我们有

$$\begin{aligned} FG = (kG)^F &\cong (M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_s}(D_s))^F \\ &\cong \prod_{1\le i\le s}(M_{n_i}(D_i))^F \\ &\cong \prod_{1\le i\le s} M_{n_i}(F\otimes_k D_i). \end{aligned}$$

由引理 10.2 知 $F\otimes_k D_i$ 是 F 的有限可分扩域的直积，从而

$$FG\cong\prod_i M_{n_i}(F_i),$$

其中 F_i 是 F 的有限可分扩域. 因 $\rho\in\overline{\mathrm{Irr}}_F G$, 故存在 FG 的唯一单因子 $M_{n_i}(F_i)$, 使得有 FG- 模同构 (定理 4.7(i),(ii))

$$M_{n_i}(F_i)\cong n_i\rho.$$

记 $m=n_i$. 再由引理 10.2 知 $K\otimes_F F_i$ 是 K 的有限扩域 K_j 的直积，故有 KG- 模同构

$$\begin{aligned} m\rho^K &\cong (m\rho)^K\cong(M_m(F_i))^K \\ &\cong M_m(K\otimes_F F_i)\cong\bigoplus_j M_m(K_j). \end{aligned}$$

令 (W_j,ρ_j) 是 KG 的单因子 $M_m(K_j)$ 上的唯一单模. 则 (W_j,ρ_j) 两两互不同构，且

$$M_m(K_j)=m\rho_j,\quad \forall j.$$

从而有 KG- 模同构

$$m\rho^K=m\left(\bigoplus_j\rho_j\right).$$

根据 Jordan-Hölder 定理知 (习题 3.2)

$$\rho^K = \bigoplus_j \rho_j. \qquad \square$$

注 将假设 $p \nmid |G|$ 去掉，上述引理仍成立，不过证明要复杂得多，参见 [CR2], p.148.

10.4 定理 设 G 是有限群， $\mathrm{char} F \nmid |G|$. 则 $\mathrm{Irr}_F G$ 是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的 F- 线性无关子集.

特别地，我们有

(i) 设 χ 是 G 的不可约 F- 特征标. 则 $\chi \neq 0$.

(ii) 设 ρ_1, ρ_2 是 G 的不可约 F- 表示， χ_1, χ_2 是其特征标. 则

$$\rho_1 \cong \rho_2 \iff \chi_1 = \chi_2.$$

(iii) $|\overline{\mathrm{Irr}}_F G| = |\mathrm{Irr}_F G|$.

证 若 $\mathrm{char} F = 0$, 则由特征标的正交关系即得. 设 $\mathrm{char} F = p > 0$. 设 E 是 F 的一个代数闭包. 则 E 是 G 的分裂域. 设 $\mathrm{Irr}_E G = \{\chi_1, \cdots, \chi_s\}$. 则 $\chi_1, \cdots, \chi_s$ 是 E- 线性无关的 (定理 II.3.2).

设 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G = \{(U_1, \eta_1), \cdots, (U_r, \eta_r)\}$, $\mathrm{Irr}_F G = \{\mu_1, \cdots, \mu_r\}$. 则由引理 10.3 知

$$\eta_i^E \cong \bigoplus_j \rho_{ij}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

其中 $\rho_{ij} \in \overline{\mathrm{Irr}}_E G$, $\rho_{ij} \not\cong \rho_{ij'}$, $j \neq j'$.

设 $i \neq i'$. 则 $\eta_i \not\cong \eta_{i'}$. 从而由引理 9.2 有

$$0 = \dim_F \mathrm{Hom}_{FG}(U_i, U_{i'}) = \dim_E \mathrm{Hom}_{EG}(U_i^E, U_{i'}^E).$$

于是 $\rho_{ij} \not\cong \rho_{i'j'}$, $\forall j, j'$. 因 η_i^E 的特征标也为 μ_i, 从而 μ_i 是若干互不相同的 χ_{ij} 的和， $\chi_{ij} \in \mathrm{Irr}_E G$, 且 $\{\chi_{ij}\}$ 与 $\{\chi_{i'j}\}$ 的交为空. 从

而由 $\chi_1,\cdots,\chi_s$ 的 F- 线性无关性即知 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ 是 F- 线性无关的. □

注　利用引理 10.3 后面的注，同法可证明上述定理对于任一域均成立．参见 [CR2], p.419.

在定理 10.4 的证明中我们看到，研究有限群的常表示的一个有效办法是考察它与分裂域上常表示的联系．为此考虑不可约 F-表示 ρ 的扩张 ρ^K 的不可约分解，其中 $K \supseteq F$. 下面我们将这一想法进一步强化.

10.5　设 $E|F$ 是有限 Galois 扩张，即 E 是 F 的有限可分正规扩域，G 是有限群，$A = FG$. 则 $A^E \cong EG$. 对于任一 $\sigma \in \mathrm{Gal}(E|F)$, 定义映射 $\sigma \otimes \mathbf{1} : A^E \to A^E$ 如下：

$$(\sigma \otimes \mathbf{1})(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \sum_{g\in G} \sigma(\lambda_g)g, \quad \lambda_g \in E.$$

则 $\sigma \otimes \mathbf{1}$ 是环 A^E 的自同构，但 $\sigma \otimes 1$ 不是 E- 线性映射，事实上

$$(\sigma \otimes 1)(\xi x) = \sigma(\xi)(\sigma \otimes 1)(x), \quad \forall \xi \in E,\ x \in A^E.$$

因此 σ 不是 A^E 的 E- 代数自同构.

因为 F 是 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 的不变子域，即

$$F = \{\xi \in E \mid \sigma(\xi) = \xi, \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(E|F)\},$$

故容易推出：对于 $x \in A^E$, 有

$$(\sigma \otimes \mathbf{1})(x) = x, \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(E|F) \iff x \in A.$$

设 (M,T) 是 G 的任一 n 维 E- 表示，其中 $T: G \to GL_n(E)$ 是群同态．对于任一 $\sigma \in \mathrm{Gal}(E|F)$, 定义 G 的 E- 表示 (M^σ,T^σ), 其

中表示空间 $M^\sigma = M$, 而群同态 T^σ 定义为: 若 $T(g) = (t_{ij})_{n\times n} \in GL_n(E)$, 则

$$T^\sigma(g) = (\sigma(t_{ij}))_{n\times n}, \quad \forall g \in G.$$

直接验证可知 T^σ 的确是群同态. 将 M^σ 称为 M 的共轭表示.

将 M 和 M^σ 视为左 A^E- 模, 相应的代数同态仍分别记为 T 和 T^σ. 则可以验证 T^σ 恰是如下 E- 代数同态的合成:

$$A^E \xrightarrow{\sigma^{-1}\otimes 1} A^E \xrightarrow{T} M_n(E) \xrightarrow{\sigma} M_n(E),$$

其中最后一个 σ 是指作用在矩阵的每个元素上. (注意, T 是 E-线性的, 而 σ 不是 E- 线性的, 但加上 $\sigma^{-1}\otimes 1$ 以后则保证了这三个映射的合成是 E- 线性的, 且合成的效果恰是 M^σ 相应的代数同态.) 显然有

$$(M^\sigma)^\tau = M^{\sigma\tau}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(E/F).$$

因此 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 在 A^E 的表示的同构类的集合上有一作用. 这一作用将单模仍变成单模, 从而得到 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 在 $\overline{\mathrm{Irr}_E}G$ 上的作用. 用 $\mathrm{orb}(M)$ 表示 M 所在的 $\mathrm{Gal}(E|F)$- 轨道.

对于 G 的任一 E- 值类函数 f, 定义

$$\sigma(f) := f^\sigma : \quad g \ \mapsto \ \sigma(f(g)), \quad \forall g \in G.$$

则 f^σ 是 G 的 E- 值类函数. 特别地, 若 M 的特征标为 χ, 则 M^σ 的特征标恰为 χ^σ. 从而得到 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 在 $\mathrm{Irr}_E G$ 上的作用. 用 $\mathrm{orb}(\chi)$ 表示 χ 所在的 $\mathrm{Gal}(E|F)$- 轨道.

10.6 设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 则 A^E 是半单代数. 设 $W = \{e_1, \cdots, e_r\}$ 是 A^E 的全体中心本原幂等元的集合. 则 W 恰是 A^E 的单因子的单位元 (参见命题 1.7(iii)). 对于任一 $e \in W$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(E|F)$, 因为

$\sigma\otimes 1$ 是环 A^E 的自同构，故 $(\sigma\otimes 1)e$ 仍是中心本原幂等元. 从而得到 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 在 W 上的一个作用.

根据半单代数的表示理论，知 W 与 $\overline{\mathrm{Irr}_E}G$ 之间存在着一一对应 $e\mapsto S$, 其中 S 是 G 的不可约 E- 表示，使得 e 在 S 上的作用是恒等作用， $\forall e\in W$. 这是因为任一 G 的不可约 E- 表示 S 是 A^E 的唯一的单因子上的单模，从而 e 在 S 上的作用是恒等作用，而在任一与 S 不同构的单模上的作用为零. 自然的问题是 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 在 $\overline{\mathrm{Irr}_E}G$ 上的作用与 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 在 W 上的作用是否在上述一一对应下是一致的？下述引理给出了肯定的回答.

引理　设 $\mathrm{char}F\nmid |G|$, M 是单 A^E- 模， e 是 A^E 的中心本原幂等元且 e 在 M 上的作用是恒等作用. 则对于任一 $\sigma\in\mathrm{Gal}(E|F)$, $(\sigma\otimes 1)e$ 是 A^E 的中心本原幂等元且在 M^σ 上的作用是恒等作用.

证　设 T 是 M 相应的代数同态. 则

$$\begin{aligned}T^\sigma((\sigma\otimes 1)e)&=\sigma T((\sigma^{-1}\otimes 1)(\sigma\otimes 1)e)\\&=\sigma T(e)=\text{单位阵}.\end{aligned}$$ □

10.7　定理　设 $\mathrm{char}F\nmid |G|$, $E|F$ 是有限 Galois 扩张， U 是 G 的不可约 F- 表示， χ 是其特征标. 则存在 $M\in\mathrm{Irr}_E G$ 使得

$$U^E\cong m\left(\bigoplus_{N\in\mathrm{orb}(M)}N\right).$$

从而

$$\chi=m\left(\sum_{\eta\in\mathrm{orb}(\chi)}\eta\right).$$

若 $\mathrm{char}F=p>0$, 则上述 $m=1$.

证 首先，由引理 10.3 知，若 $\mathrm{char}F = p > 0$，则 $m = 1$.

令 $A = FG$，则 $A^E = EG$. 设 e 是 A 的中心本原幂等元使得 e 在 U 上的作用是恒等作用. 则 $1 \otimes e$ 是 A^E 的中心幂等元. 令 $W = \{e_1, \cdots, e_r\}$ 是 A^E 的全部中心本原幂等元的集合. 则 $1 \otimes e$ 是中心本原幂等元的和. 设

$$1 \otimes e = e_1 + \cdots + e_s.$$

我们断言 $\{e_1, \cdots, e_s\}$ 是 W 的一个 $\mathrm{Gal}(E|F)$- 轨道.

事实上，因为

$$(\sigma \otimes 1)(1 \otimes e) = \sigma(1) \otimes e = 1 \otimes e, \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(E|F),$$

故 $\{e_1, \cdots, e_s\}$ 是 W 的若干条 $\mathrm{Gal}(E|F)$- 轨道之并. 若 $\{e_1, \cdots, e_s\}$ 恰是 W 的 t 条 $\mathrm{Gal}(E|F)$- 轨道之并，$t \geq 2$. 令 e_i' 是其中第 i 条轨道中所有元之和，$i = 1, \cdots, t$. 则 e_i' 是 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 作用的不动元，因此 $e_i' \in A$. 从而 e 是 A 的 t 个正交的中心幂等元之和，与 e 是中心本原幂等元不合.

设 $e_j = (\sigma_j \otimes 1)e_1$，$\sigma_j \in \mathrm{Gal}(E|F)$，$j = 1, \cdots, s$. 设 M 是单 A^E- 模，使得 e_1 在 M 上的作用是恒等作用. 则由引理 10.6 知 e_j 在 M^{σ_j} 上的作用是恒等作用.

设 S 是 U^E 的任一不可约直和项. 因为中心幂等元 $1 \otimes e$ 在 U^E 上的作用是恒等作用，故 $1 \otimes e$ 在 S 上的作用是恒等作用，从而存在 e_i 使得 e_i 在 S 上的作用是恒等作用，故 $S \cong M^{\sigma_i}$. 于是

$$U^E = \bigoplus_{i=1}^{s} m_i M^{\sigma_i}$$

将任一 $\sigma \in \mathrm{Gal}(E|F)$ 作用在 U^E 上. 根据定义易知 σ 保持 U^E 不

动，而 σ 在 M^{σ_i} 上的作用恰为 $M^{\sigma_i\sigma}$、从而

$$U^E = \bigoplus_{i=1}^{s} m_i M^{\sigma_i\sigma},\quad \forall\sigma \in \mathrm{Gal}(E|F).$$

根据 Krull-Schmidt-Remak 定理即知所有重数必须相等，记为 m. 于是

$$U^E = m\left(\bigoplus_{i=1}^{s} M^{\sigma_i}\right) = m\left(\bigoplus_{N\in\mathrm{orb}(M)} N\right).$$ □

10.8　推论　假设同定理 10.7. 令 Ω 是 $\overline{\mathrm{Irr}_E}G$ 的 $\mathrm{Gal}(E|F)$- 轨道的集合. 则存在双射 $\pi:\ \overline{\mathrm{Irr}_F}G \to \Omega$.

证　设 $U \in \overline{\mathrm{Irr}_F}G$. 由定理 10.7 知存在唯一的 $\mathcal{O} \in \Omega$ 使得

$$U^E \cong m\left(\bigoplus_{N\in\mathcal{O}} N\right).$$

令 $\pi(U) = \mathcal{O}$, 则 π 是双射，其中 π 是单射由下式可以看出：

$$\dim_E \mathrm{Hom}_G(U^E, V^E) = \dim_F \mathrm{Hom}_G(U, V);$$

而 π 是满射则由引理 9.7 保证. □

§11　Frobenius 代数和对称代数

11.1　定义　设 A 是有限维 F- 代数.

(i)　A 称为左自内射代数，如果任一投射左 A- 模均是内射模，或等价地，任一内射左 A- 模均是投射模.

(ii)　A 称为左 Frobenius 代数，如果存在左 A- 模同构 ${}_AA \cong (A_A)^*$.

(iii) A 称为对称代数，如果存在 A-A- 双模同构 ${}_AA_A \cong ({}_AA_A)^*$.

根据定义立即知道对称代数是左 Frobenius 代数, 左 Frobenius 代数是左自内射代数，反之均未必.

类似地，可以定义右自内射代数和右 Frobenius 代数. 然而自内射代数和 Frobenius 代数均是左右对称的，因此可以省略“左”或“右”. 事实上，若 A 是左自内射代数，根据对偶原则，任一内射左 A- 模均可写成 $(eA)^*$ 的形式，其中 e 是幂等元，从而由定义知它是投射模. 因此存在幂等元 $e' \in A$ 使得 $(eA)^* = Ae'$. 于是 $eA \cong ((eA)^*)^* = (Ae')^*$. 这表明任一投射右 A- 模均是内射模，即 A 是右自内射代数. 而 Frobenius 代数的左右对称性可以从下述定理中看出.

11.2 定理 设 A 是有限维代数. 则 A 是左 Frobenius 代数当且仅当存在非退化、结合双线性型 $\beta:\ A\times A \to F$, 其中结合性是指

$$\beta(ab, c) = \beta(a, bc), \quad \forall\ a,\ b,\ c \in A;$$

非退化性是指从 $\beta(A, b) = 0$ 可推出 $b = 0$.

注 由线性代数知， β 非退化等价于从 $\beta(b, A) = 0$ 可推出 $b = 0$.

证 设 A 是左 Frobenius 代数. 故有左 A- 模同构 $\theta:\ {}_AA \to (A_A)^*$. 令 $\beta(a, b) = \theta(b)(a)$. 则可直接验证 β 是非退化、结合双线性型. 例如 β 是结合的:

$$\beta(ab, c) = \theta(c)(ab),$$

$$\beta(a, bc) = \theta(bc)(a) = (b\theta(c))(a) = \theta(c)(ab).$$

反之，设 $\beta:\ A\times A \to F$ 是非退化、结合双线性型. 定义

$\theta: A \to A^*$ 如上，即 $\theta(a)(b) := \beta(b,a)$. 则直接可验证 θ 是左 A-模同构. 我们将验证细节留给读者. □

注　对于右 Frobenius 代数，我们有类似的结果. 从而 Frobenius 代数是左右对称的.

11.3　定理　设 A 是有限维 F- 代数. 则 A 是对称代数当且仅当存在非退化、结合、对称双线性型 $\beta: A \times A \to F$, 其中对称性是指

$$\beta(a,b) = \beta(b,a), \quad \forall\ a,\ b \in A.$$

证　设 A 是对称代数. 在定理 11.2 的证明中定义的 β 也是对称的:

$$\begin{aligned}\beta(a,b) &= \beta(1\cdot a,b) = \beta(1,ab) = \theta(ab)(1) \\ &= (a\cdot\theta(b))(1) = \theta(b)(a), \\ \beta(b,a) &= \beta(1,ba) = \theta(ba)(1) \\ &= (\theta(b)a)(1) = \theta(b)(a).\end{aligned}$$

设 $\beta: A\times A \to F$ 是非退化、结合、对称双线性型. 则定理 11.2 的证明中定义的 θ 也是右 A- 模同态:

$$\begin{aligned}\theta(ax)(b) &= \beta(b,ax) = \beta(ax,b) \\ &= \beta(a,xb) = \beta(xb,a), \\ (\theta(a)\cdot x)(b) &= \theta(a)(xb) = \beta(xb,a).\end{aligned}$$

从而 $\theta: A\to A^*$ 是 A-A- 双模同构. □

11.4　定理　设 G 是有限群. 则 FG 是对称代数.

证　定义 $\beta: FG\times FG \to F$ 如下:

$$\beta(\sum_{g\in G}\lambda_g g, \sum_{h\in G}\mu_h h) = \sum_{g\in G}\lambda_g\mu_{g^{-1}}.$$

则直接验证 β 是非退化、结合、对称双线性型 (细节留作习题). 从而由定理 11.3 知 FG 是对称代数. □

11.5 命题 设 A 是有限维 F- 代数. 则 A 是对称代数当且仅当存在迹型 F- 线性函数 (即 $\phi: A \to F$ 满足 $\phi(ab) = \phi(ba)$, $\forall\ a, b \in A$), 使得从 $\phi(L) = 0$ 可推出 $L = 0$, 其中 L 是 A 的任一单边理想.

证 设 A 是对称代数, 从而存在非退化、结合、对称双线性型 $\beta: A \times A \to F$. 令 $\phi(a) = \beta(a, 1)$. 则

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= \beta(ab, 1) = \beta(a, b)\\ &= \beta(b, a) = \beta(1, ba)\\ &= \beta(ba, 1) = \phi(ba).\end{aligned}$$

若 L 是 A 的左理想, 且 $\phi(L) = 0$, 即 $\beta(L, 1) = 0$, 则

$$\begin{aligned}0 &= \beta(L, 1) = \beta(AL, 1)\\ &= \beta(1, AL) = \beta(A, L).\end{aligned}$$

从而由 β 的非退化性知 $L = 0$. 对右理想同理可证.

反之, 令 $\beta(a, b) = \phi(ab)$. 则直接验证 β 是非退化、结合、对称双线性型. 从而 A 是对称代数. □

习 题

1. 证明: 任一投射左 A- 模是内射模当且仅当任一内射左 A- 模是投射模.

2. 完成定理 11.4 的证明细节.

3. 证明: Frobenius 代数上的全矩阵代数仍是 Frobenius 代数.

4. 设 A 是有限维代数. 定义 A 的平凡扩张代数 $T(A)$ 如下: 作为 F- 空间有 $T(A) = A \oplus A^*$, 其中乘法为

$$(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb), \quad \forall\ a, b \in A,\ f, g \in A^*.$$

证明 $T(A)$ 是对称代数. [提示: 考虑 $\theta: T(A) \to (T(A))^*$, $\theta(a, f)((b, g)) = f(b) + g(a)$.]

第4章 诱导表示与诱导特征标

本章研究群 G 的表示与其子群 H 的表示之间的联系. 这为归纳地构造群表示提供了一般的方法, 同时也将表示与结构更紧密地联系起来. 这也是群表示论中独有的重要技巧, 它难以有效地推广到一般的代数表示中.

本章总假定 G 是有限群, 尽管有时这不是必需的.

§1 基本概念和性质

1.1 本节总设 H 是群 G 的子群, (W,ρ) 是 H 的 F- 表示. 怎样由此得到 G 的一个 F- 表示呢? 换言之, 已知左 FH- 模 W, 如何构造一个左 FG- 模, 使得它在 FH 上的限制含有子模与 W 同构?

自然的办法是利用张量积. 因为群代数 FG 有 FG-FH- 双模结构, 因此张量积

$$FG \otimes_{FH} W$$

具有左 FG- 模结构. 将这个左 FG- 模称为 W 的诱导模, 它相应的 G 的 F- 表示称为 W 的诱导表示, 记为 (W^G,ρ^G), 或 W^G, 或 ρ^G, 或 ρ_H^G, 等等.

例 设 ρ 是子群 H 的正则 F- 表示. 则 ρ^G 恰为 G 的正则 F- 表示.

事实上，ρ 相应的左 FH- 模为 FH，因此依引理 III.8.7 有左 FG- 模同构

$$\rho^G = (FH)^G = FG \otimes_{FH} FH \cong FG.$$

1.2　设 $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ 是 W 的一组 F- 基. 我们希望知道诱导表示 W^G 的一组 F- 基以及 G 中元是如何作用在 W^G 上的.

设 $\{g_1 = 1, \cdots, g_r\}$ 是 G 关于 H 的左陪集的一个代表系，即

$$G = g_1 H \cup \cdots \cup g_r H.$$

则 G 中任一元可唯一地写成 $g_i h$, $h \in H$, 的形式. 因此 FG 是自由右 FH- 模：$FG = g_1(FH) \oplus \cdots \oplus g_r(FH)$. 由于 $g_i x \mapsto x$ 是 $g_i(FH)$ 到 FH 的 F-FH- 双模同构，因此有 F- 向量空间同构

$$\begin{aligned} W^G &= FG \otimes_{FH} W \\ &= (g_1(FH) \otimes_{FH} W) \oplus \cdots \oplus (g_r(FH) \otimes_{FH} W) \\ &\cong W \oplus \cdots \oplus W \\ &= rW. \end{aligned}$$

这就证明了 $\dim_F W^G = r \cdot \dim_F W = [G : H] \dim_F W$.

注意到 $g_i FH \otimes_{FH} W = g_i \otimes_{FH} W = g_i(1 \otimes W)$, 故有

$$W^G = \bigoplus_{i=1}^{r} g_i(1 \otimes_{FH} W).$$

因 W^G 中任一元均可写成 $g_i \otimes w_j$, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le n$, 的 F- 线性组合，故它是 W^G 的一组 F- 基. 对于任一 $g \in G$, 存在唯一的 g_l 和唯一的 $h \in H$ 使得 $gg_i = g_l h$, 于是

$$g(g_i \otimes w_j) = g_l h \otimes w_j = g_l \otimes h w_j, \quad 1 \le j \le n. \tag{1}$$

因此，若 $\rho(h)$ 在基 $\{w_1,\cdots,w_n\}$ 下的矩阵为 $\rho_B(h)=(a_{ij}(h))_{n\times n}$，则

$$\begin{aligned}g(g_i\otimes w_j)&=(gg_i)\otimes w_j=(g_lh)\otimes w_j=g_l\otimes hw_j\\&=g_l\otimes\sum_{t=1}^{n}a_{tj}(h)w_t=\sum_{t=1}^{n}a_{tj}(h)(g_l\otimes w_t).\end{aligned}$$

令

$$\dot{a}_{tj}(g)=\begin{cases}a_{tj}(g), & g\in H,\\ 0, & g\notin H,\end{cases}\qquad \forall 1\le j,\ t\le n.$$

则

$$\begin{aligned}g(g_i\otimes w_j)&=\sum_{t=1}^{n}\dot{a}_{tj}(g_l^{-1}gg_i)(g_l\otimes w_t)\\&=\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}\dot{a}_{tj}(g_s^{-1}gg_i)(g_s\otimes w_t).\end{aligned}$$

令

$$\dot{\rho}_B(g)=(\dot{a}_{ij}(g))_{n\times n},\quad \forall g\in G.$$

则 $\rho^G(g)$ 在基 $\{g_1\otimes w_1,\cdots,g_1\otimes w_n,\cdots,g_r\otimes w_1,\cdots,g_r\otimes w_n\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\dot{\rho}_B(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \dot{\rho}_B(g_1^{-1}gg_r)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dot{\rho}_B(g_r^{-1}gg_1) & \cdots & \dot{\rho}_B(g_r^{-1}gg_r)\end{pmatrix}. \tag{2}$$

注意 $\{g_i^{-1}gg_1,\cdots,g_i^{-1}gg_r\}$ 中有且仅有一个元素属于 H，因此上述分块矩阵的每一行有且仅有一个子矩阵非零；同理，每一列有且仅有一个子矩阵非零.

综上所述，我们证明了下述定理：

1.3　定理　(i) $\dim_F W^G = [G:H]\cdot\dim_F W$.

(ii) 延用 1.2 中记号, 则 $\{g_1\otimes w_1,\cdots,g_1\otimes w_n,\cdots,g_r\otimes w_1,\cdots,g_r\otimes w_n\}$ 是 W^G 的一组 F- 基, 且 $\rho^G(g)$ 在此基下的矩阵由 (2) 式给出.

(iii) 存在 F- 向量空间的直和分解

$$W^G = g_1(1\otimes_{FH}W)\oplus\cdots\oplus g_r(1\otimes_{FH}W),$$

且有 FH- 模同构 $1\otimes_{FH}W\cong W$, $1\le i\le r$.

1.4　例　令 G/H 是 G 关于 H 的左陪集的集合. 设 $g\in G, xH\in G/H$. 定义 $g(xH)=(gx)H$. 则 G/H 成为 G- 集. 由此得到的 G 的表示 $(F(G/H),\rho)$ 恰为 H 的单位表示 $\mathbf{1}_H$ 的诱导表示 $\mathbf{1}_H^G$.

事实上, 取 $\mathbf{1}_H^G = FG\otimes_{FH}F$ 的一组 F- 基为 $\{g_1\otimes 1,\cdots,g_r\otimes 1\}$, 其中 $1\in F$, $\{g_1,\cdots,g_r\}$ 是 G 关于 H 的左陪集的一个代表系. 因为 $h\cdot 1=1$, $\forall h\in H$, 故 $g_iH\mapsto g_i\otimes 1$ 是 $(F(G/H),\rho)$ 到 $\mathbf{1}_H^G$ 的 FG- 模同构.

若 G 是 Abel 群且 $[G:H]>1$, 则 H 的单位复表示的诱导表示 $\mathbf{1}_H^G$ 必定是可约的.

将 G 的子群的一次表示的诱导表示称为 G 的单项表示.

下述定理表明定理 1.3(iii) 中性质完全刻画了诱导表示.

1.5　定理　设 M 是 FG- 模, M 在 H 上的限制含有子模 W 使得有如下 F- 空间的分解:

$$M=\bigoplus_{i=1}^{r} g_iW,$$

其中 $\{g_1,\cdots,g_r\}$ 是 G 关于 H 的左陪集的代表系. 则有左 FG- 模同构 $M\cong W^G$.

证 由定理 1.3(iii) 知 W^G 有 F- 空间的直和分解

$$W^G = \bigoplus_{i=1}^{r} g_i(1 \otimes W),$$

且有 F- 空间的同构 $g_i(1 \otimes W) \simeq W$. 另一方面，有 F- 空间同构 $W \cong g_iW: w \mapsto g_iw$. 因此得到 F- 空间同构 $\pi: W^G \xrightarrow{\sim} M$, 满足 $\pi(g_i(1 \otimes w)) = g_iw$, $\forall w \in W$. 直接验证 π 是 FG- 模同态. □

1.6 下面我们推导诱导表示的特征标公式. 设 χ 是 (W, ρ) 的特征标. 将 H 上的类函数 $\chi: H \to F$ 扩充成 $\dot{\chi}: G \to F$, 其中

$$\dot{\chi}(g) = \begin{cases} \chi(g), & g \in H, \\ 0, & g \notin H. \end{cases}$$

则从 (2) 式可知 W^G 的特征标 χ^G 由下式给出：

$$\chi^G(g) = \mathrm{tr}(\rho^G(g)) = \sum_{i=1}^{r} \dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i). \tag{3}$$

由此立即看出

命题 (i) 若 $g \notin \bigcup_{i=1}^{r}(g_iHg_i^{-1}) = \bigcup_{x \in G}(xHx^{-1})$, 则 $\chi^G(g) = 0$. 特别地，若 $H \lhd G$, 则 $\chi^G(g) = 0$, $\forall g \notin H$.

(ii) 若 $H \subset Z(G)$, 则 $\chi^G(g) = [G:H]\dot{\chi}(g)$, $\forall g \in G$.

公式 (3) 依赖于 G 关于 H 的左陪集代表系的选取. 注意到 $\dot{\chi}$ 本身虽然未必是 G 的类函数，但对于任一 $h \in H$ 和任一 $g \in G$ 有 $\dot{\chi}(hgh^{-1}) = \dot{\chi}(g)$. 由此可知，若 $x \in g_iH$, $x = g_ih$, $h \in H$, 则

$\dot{\chi}(x^{-1}gx) = \dot{\chi}(h^{-1}g_i^{-1}gg_ih) = \dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{x\in g_iH}\dot{\chi}(x^{-1}gx)\\ &= \sum_{i=1}^{r}|H|\dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)\\ &= |H|\chi^{G}(g).\end{aligned}$$

这就得到诱导特征标的如下公式，它不依赖于 G 关于 H 的左陪集代表系的选取.

1.7　命题　设 $\mathrm{char}F \nmid |H|$. 则

$$\begin{aligned}\chi^{G}(g) &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G, x^{-1}gx\in H}\chi(x^{-1}gx), \quad \forall g\in G. \qquad (4)\end{aligned}$$

下述诱导表示的性质均可归结为相应的张量积的性质.

1.8　命题　设 (W,ρ) 是子群 H 的表示.

(i) 若 W_1 是 W 的子表示，则 W_1^G 是 W^G 的子表示.

(ii) 若 $W = W_1\oplus\cdots\oplus W_n$ 是子表示的直和分解，则

$$W^{G} = W_1^{G}\oplus\cdots\oplus W_n^{G}.$$

(iii) 设 K 是包含 H 的 G 的子群. 则 $W^G \cong (W^K)^G$.

(iv) 设 ψ 是 G 的表示. 则有 FG- 模同构

$$\rho^{G}\otimes_F\psi \cong (\rho\otimes_F\psi_H)^{G},$$

其中 ψ_H 是 ψ 在 H 上的限制表示.

证 令 $A=FG$, $B=FH$. 设 $\{g_1,\cdots,g_r\}$ 是 G 关于 H 的左陪集代表系.

(i) 取 W 的一组 F- 基 $\{w_1,\cdots,w_n\}$ 使得 $\{w_1,\cdots,w_s\}$ 是 W_1 的一组 F- 基. 则由定理 I.3 知 $\{g_i\otimes w_j\mid 1\le i\le r,\ 1\le j\le n\}$ 是 W^G 的一组 F- 基, 其子集 $\{g_i\otimes w_j\mid 1\le i\le r,\ 1\le j\le s\}$ 是 W_1^G 的一组 F- 基. 又因为 W_1^G 已经是 A- 模, 故 W_1^G 是 W^G 的子 A- 模.

(ii) 根据张量积与模的直和的关系, 我们有左 A- 模同构:

$$\begin{aligned}W^G&=A\otimes_B W=A\otimes_B(W_1\oplus\cdots\oplus W_n)\\&\cong(A\otimes_B W_1)\oplus\cdots\oplus(A\otimes_B W_n)\\&=W_1^G\oplus\cdots\oplus W_n^G.\end{aligned}$$

(iii) 由张量积的结合律和引理 III.8.7 知有下述 A- 模同构 (令 $C=FK$):

$$\begin{aligned}(W^K)^G&=A\otimes_C(C\otimes_B W)\cong(A\otimes_C C)\otimes_B W\\&\cong A\otimes_B W=W^G.\end{aligned}$$

(iv) 设 V 是 ψ 的表示空间. 则 $(\rho\otimes_F\psi_H)^G$ 与 $\rho^G\otimes\psi$ 的表示空间分别是 $A\otimes_B(W\otimes_F V)$ 与 $(A\otimes_B W)\otimes_F V$, 其中 $W\otimes_F V$ 的左 B- 模结构是在 I.3.3.3 意义下的, 即满足

$$h(w\otimes v)=(hw)\otimes(hv),\quad \forall h\in H,w\in W,v\in V;$$

$A\otimes_B(W\otimes_F V)$ 的左 A- 模结构为

$$\begin{aligned}&g(a\otimes(w\otimes v))=(ga)\otimes(w\otimes v),\\&\forall g\in G,a\in A,w\in W,v\in V;\end{aligned}$$

而 $(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 的左 A- 模结构是在 I.3.3.3 意义下的，即满足

$$g((a\otimes w)\otimes v)=(g(a\otimes w))\otimes(gv)=(ga\otimes w)\otimes(gv).$$

注意，在由命题 III.8.3 断言的 A- 模同构 $A\otimes_B(W\otimes_F V)\simeq(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 中，左 A- 模 $(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 的结构为 $g((a\otimes w)\otimes v)=((ga)\otimes w)\otimes v$; 而左 B- 模 $W\otimes_F V$ 的结构为 $h(w\otimes v)=(hw)\otimes v$. 因此不可以应用命题 III.8.3.

我们要定义的左 A- 模同构 $\varphi:\ A\otimes_B(W\otimes_F V)\to(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 应该满足 $\varphi(1\otimes(w\otimes v))=(1\otimes w)\otimes v$ (将 φ 视为左 B- 模同构即可看出). 因此若 φ 存在，则 φ 应该满足

$$\varphi(g\otimes(w\otimes v))=(g\otimes w)\otimes(gv),\quad\forall g\in G,w\in W,v\in V.$$

这提示我们对于固定的 $g\in G$ 考虑 F- 双线性映射

$$W\times V\to(A\otimes_B W)\otimes_F V,$$
$$(w,v)\mapsto(g\otimes w)\otimes(gv).$$

因此存在 F- 线性映射 $\tau_g:\ W\otimes V\to(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 使得 $\tau_g(w\otimes v)=(g\otimes w)\otimes(gv)$. 对于任一 $a=\sum\limits_{g\in G}\lambda_g g\in A$, 定义 F- 线性映射 $\tau_a=\sum\limits_{g\in G}\lambda_g\tau_g$. 则

$$\tau_a(w\otimes v)=\sum_{g\in G}\lambda_g(g\otimes w)\otimes(gv).$$

由于 $\tau_{a+b}=\tau_a+\tau_b$, $\forall a,b\in A$, 故 $(a,x)\mapsto\tau_a(x)$ 是从 $A\times(W\otimes_F V)$ 到 $(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 的 F- 双线性映射, $\forall x\in W\otimes_F V$. 若 $b=$

$\sum_{h\in H}\mu_h h\in B$, 则

$$\begin{aligned}\tau_{ab}(w\otimes v)&=\sum_{g\in G,h\in H}\lambda_g\mu_h\tau_{gh}(w\otimes v)\\&=\sum_{g\in G,h\in H}\lambda_g\mu_h(gh\otimes_B w)\otimes(ghv)\\&=\sum_{h\in H}\mu_h\sum_{g\in G}\lambda_g(g\otimes_B hw)\otimes(ghv)\\&=\sum_{h\in H}\mu_h\tau_a(hw\otimes hv)\\&=\tau_a\sum_{h\in H}\mu_h h(w\otimes v)\\&=\tau_a b(w\otimes v).\end{aligned}$$

这表明 $(a,x)\mapsto\tau_a(x)$ 还是 $A\times(W\otimes_F V)$ 到 $(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 的 B- 平衡映射. 从而存在 F- 线性映射 φ: $A\otimes(W\otimes_F V)\to(A\otimes_B W)\otimes_F V$ 使

$$\varphi(g\otimes(w\otimes v))=(g\otimes w)\otimes(gv).$$

因为

$$g'(g\otimes(w\otimes v))=g'g\otimes(w\otimes v),$$
$$g'((g\otimes w)\otimes(gv))=(gg'\otimes w)\otimes(g'gv),\quad\forall g'\in G,$$

故 φ 是 A- 模同态. 显然 φ 是满射. 又因为

$$\begin{aligned}\dim_F(A\otimes_B(W\otimes_F V))&=[G:H]\dim_F W\cdot\dim_F V\\&=\dim_F((A\otimes_B W)\otimes V),\end{aligned}$$

故 φ 是 A 模同构. □

将命题 1.8 用特征标的语言复述如下 (亦可用 (3) 式直接证之):

1.9　推论　设 χ 是 W 的特征标.

(i) 若 $\chi=\chi_1+\chi_2$ 是 H 的特征标分解，则 $\chi^G=\chi_1^G+\chi_2^G$.

(ii) 设 K 是包含 H 的 G 的子群. 则 $\chi^G=(\chi^K)^G$.

(iii) 设 λ 是 G 的特征标. 则

$$\chi^G\cdot\lambda=(\chi\cdot\lambda_H)^G,$$

其中 λ_H 是 λ 在 H 上的限制.

1.10　例　设 $G=S_4$, $H=S_3$, χ 是 S_3 的不可约复特征标，其中

$$\chi((1))=2,\quad \chi((12))=0,\quad \chi((123))=-1.$$

下面确定 χ^G. 因 $B=\{(1),(12),(123),(12)(34),(1234)\}$ 是 G 的共轭类的代表系，故只要计算

$$\chi^G(g)=\frac{1}{6}\sum_{x\in G,x^{-1}gx\in H}\chi(x^{-1}gx),\quad g\in B.$$

易知

$$\chi^G((1))=\frac{24}{6}\chi((1))=8.$$

因 S_3 中没有元与 $(12)(34)$ 和 (1234) 在 G 中共轭，故

$$\chi^G((12)(34))=\chi^G((1234))=0.$$

又因 S_3 中与 (12) 在 G 中共轭的元也与 (12) 在 S_3 中共轭，故

$$\chi^G((12))=\chi((12))=0.$$

对于固定的 $h\in H$, 有 $|\{x\in G\mid x^{-1}gx=h\}|=|C_G(g)|$.

因 S_3 中与 $g=(123)$ 在 G 中共轭的元为 $(123),(132)$，且 $|C_G((123))|=\frac{|G|}{8}=3$，故

$$\begin{aligned}\chi^G((123)) &= \frac{1}{6}(3\chi((123))+3\chi((132))) \\ &= \frac{1}{6}(3\chi((123))+3\chi((123))) \\ &= \chi((123)) \\ &= -1.\end{aligned}$$

与 S_4 的复特征标表相比较可知

$$\chi^G=\chi_3+\chi_4+\chi_5,$$

其中 χ_3 是 S_4 的 2 次不可约复特征标， χ_4,χ_5 为 S_4 的两个 3 次不可约复特征标，参见 II.4.1.

习　题

延用正文中的记号 G、H, W, r, $g_1,\cdots,g_r$.

1. 证明 W^G 在 H 上的限制表示含有与 W 同构的子表示.

2. 设 $H\lhd G$. 证明 W^G 的子空间 $g_i(KH)\otimes_{KH}W$ 是左 KH-模.

3. 设 V 是 W 的诱导表示. 则 V 有向量空间的直和分解 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_r$, $\dim_F W_i=\dim_F W$, 且 G 在 V 上的作用可迁地置换 $\{W_1,\cdots,W_r\}$ (即 $\forall g\in G$, $1\le i\le r$, gW_i 必为某一 W_j; 且 $\forall W_i$, W_j, 存在 $g\in G$ 使得 $gW_i=W_j$).

反之，设 G 的 F- 表示 V 有子空间的直和分解 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ 且 G 在 V 上的作用可迁地置换 $\{W_1,\cdots,W_s\}$. 对任一 i, 令 $H=\{g\in G\mid gW_i=W_i\}$. 则 V 是 H 的 F- 表示 W_i 的诱导表示， $s=[G:H]$.

4. 设 G 是子群 H 与 K 的直积，ρ 是 H 的 F- 表示，γ 是 K 的正则 F- 表示. 则 $\rho^G \cong \rho\#\gamma$ (参见 I.3.5).

5. 设 $G = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 是四元数群. $H = \langle i \rangle$.

(1) 设 ρ_1 是 H 的 1 次复表示，其中 $\rho_1(i) = -1$. 证明单项表示 ρ_1^G 是两个 1 次复表示的直和.

(2) 设 ρ_2 是 H 的 1 次复表示，其中 $\rho_2(i) = i$. 证明单项表示 ρ_2^G 是 G 的 2 次不可约复表示，从而是 G 的唯一的非 1 次不可约复表示.

6. (Mackey) 令 $V = \{f : G \to W \mid f(hg) = hf(g),\ \forall h \in H, g \in G\}$. 则 V 是 F- 空间. 定义 G 在 V 上的作用为

$$gf(x) = f(xg), \quad \forall g, x \in G,\ f \in V.$$

证明 $V \cong W^G$.

7. 设 χ 是 W 的特征标. 则 $\mathrm{Ker}\chi^G = \bigcap_{g\in G} g(\mathrm{Ker}\chi)g^{-1}$.

8. 设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, χ 是 H 的 F- 特征标，$g \in G$, C_g 是 g 所在的共轭类. 证明:

$$\chi^G(g) = \frac{|C_G(g)|}{|H|} \sum_{h\in C_g\cap H} \chi(h) = \frac{[G:H]}{|C_g|} \sum_{h\in C_g\cap H} \chi(h).$$

9. 证明存在 FG- 模同构 $(W^G)^* \simeq (W^*)^G$, 其中 W^* 是 W 的反轭表示.

§2　模与类函数的 Frobenius 互反律

2.1　首先考虑诱导表示与限制表示之间的一个重要关系. 设 H 是 G 的子群，W 是 H 的 F- 表示，M 是 G 的 F- 表示.

定理(模的 Frobenius 互反律) 存在 F- 线性同构

$$\mathrm{Hom}_{FG}(W^G, M) \cong \mathrm{Hom}_{FH}(W, M). \tag{1}$$

证 由习题 III.8.3 知存在 F- 同构

$$\pi : \mathrm{Hom}_{FG}(W^G, M) = \mathrm{Hom}_{FG}(FG \otimes_{FH} W, M)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{FH}(W, \mathrm{Hom}_{FG}(FG, M)).$$

而由定理 III.2.9 知有左 FG- 模同构 (从而也是左 FH- 模同构)

$$\mathrm{Hom}_{FG}(FG, M) \cong M,$$

由此得证. □

模的 Frobenius 互反律将左 FG- 模 W^G 与 M 之间的模同态空间归结为左 FH- 模 W 与 M_H 之间的模同态空间, 其意义是明显的.

设 χ 与 μ 分别是 H 的表示 W 和 G 的表示 M 的特征标. 若 $\mathrm{char}F = 0$, 则由引理 II.2.4 知

$$\dim_F \mathrm{Hom}_{FG}(W^G, M) = (\chi^G, \mu)_G,$$
$$\dim_F \mathrm{Hom}_{FH}(W, M) = (\chi, \mu_H)_H,$$

其中 μ_H 是 M 在 H 上的限制表示的特征标, $(-,-)_G$ 和 $(-,-)_H$ 是在 II.2.1 中定义的. 由此即得到特征标的 Frobenius 互反律

$$(\chi^G, \mu)_G = (\chi, \mu_H)_H. \tag{2}$$

下面我们将看到, 这一重要关系对于 char $F \nmid |G|$ 的情形皆真.

2.2 由定理 II.3.2 知, 若 $\mathrm{char}F \nmid |H|$ 且 F 是 H 的分裂域, 则 H 的不可约 F- 特征标作成的类函数空间 $\mathrm{cf}_F(H)$ 的一组 F- 基.

因此 H 的任一类函数 η 可以通过诱导特征标扩充为 G 的类函数 η^G. 诱导特征标 χ^G 的值可由 χ 的值表达，这促使我们得到 η^G 的表达式. 由此自然地得到如下定义：

定义　设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, $H \leq G$, $\eta \in cf_F(H)$. 定义 $\eta^G : G \to F$ 如下：

$$\eta^G(g) := \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\eta}(x^{-1}gx), \quad \forall g \in G,$$

其中

$$\dot{\eta}(g) := \begin{cases} \eta(g), & g \in H, \\ 0, & g \notin H. \end{cases}$$

因此

$$\eta^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G, x^{-1}gx \in H} \eta(x^{-1}gx), \quad \forall g \in G.$$

显然 $\eta^G \in \mathrm{cf}_F(G)$. 将 η^G 称为 η 的诱导类函数. 若 η 是 H 的特征标，则上述 η^G 就是相应诱导表示的特征标.

容易将诱导特征标的性质 (参见推论 1.9) 推广到诱导类函数上. 我们将这一工作留作习题.

2.3　定理 (类函数的 Frobenius 互反律)　设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, $\eta \in \mathrm{cf}_F(H), \xi \in \mathrm{cf}_F(G)$. 则

$$(\eta^G, \xi)_G = (\eta, \xi_H)_H, \tag{3}$$

其中 ξ_H 是 ξ 在 H 上的限制.

特别地，若 η 是 H 的 F- 特征标，ξ 是 G 的 F- 特征标，则 (3) 式给出了诱导特征标的 Frobenius 互反律.

证

$$
\begin{aligned}
(\eta^G,\xi)_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\eta^G(g)\xi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in G}\dot{\eta}(x^{-1}gx)\xi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{g\in G}\dot{\eta}(x^{-1}gx)\xi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\dot{\eta}(y)\xi(xy^{-1}x^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\dot{\eta}(y)\xi(y^{-1})\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot{\eta}(y)\xi(y^{-1})\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\eta(y)\xi(y^{-1})\\
&= (\eta,\xi_H)_H.
\end{aligned}
$$

□

注 公式 (3) 经常以如下方式被应用：设 $\mathrm{char}F=0$ 且 F 是 G 与 H 的分裂域. 设 η 与 ξ 分别是 H 和 G 的不可约特征标. 则 Frobenius 互反律将 ξ 出现在 η^G 中的重数 $(\eta^G,\xi)_G$ 归结为 η 出现在 ξ_H 中的重数 $(\eta,\xi_H)_H$.

2.4 例 设 H 是 G 的子群, $\mathrm{char}F\nmid|H|$, σ^G 是 G 的单项 F-表示, 其中 σ 是 H 的 1 次 F- 表示, τ 是 σ^G 的不可约分支. 则 σ 是 τ_H 的不可约分支.

事实上, 由定理 2.1 知

$$\mathrm{Hom}_{FH}(\sigma,\tau_H)\cong\mathrm{Hom}_{FG}(\sigma^G,\tau)\neq 0.$$

因 τ_H 是 H 的完全可约表示, 故 σ 是 τ_H 的直和项.

若 F 还是代数闭域，G 是 Abel 群，则 H 的任一不可约 F-表示 σ 均是 G 的某一不可约 F- 表示在 H 上的限制，因为此时 G 与 H 的不可约 F- 表示均是 1 维的.

2.5　例　设 $G = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 是四元数群，其乘法表由 III.1.3 例 4 给出，其表出为 $G = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ bab^{-1} = a^3\rangle$. 下面确定 G 的全部不可约实表示.

首先，G 的换位子群 $G' = \langle -e\rangle = \{e, -e\}$, $G/G' \cong \mathbf{Z}_2 \dotplus \mathbf{Z}_2$. 由引理 I.7.4 知 G/G' 有四个 1 次实表示，从而 G 有四个 1 次实表示 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, 它们由下式确定:

$$\rho_1(i) = \rho_1(j) = 1; \qquad \rho_2(i) = 1,\ \rho_2(j) = -1;$$
$$\rho_3(i) = -1,\ \rho_3(j) = 1; \qquad \rho_4(i) = \rho_4(j) = -1.$$

注意群代数 $\mathbf{R}G$ 与 Hamilton 四元数代数 $\mathbf{H}$ 的区别，前者维数为 8, 后者为 4. $\forall x \in \{e, i, j, k\} \subseteq G$, 为区别 $\mathbf{R}G$ 中元 $(-1)x$ 与 G 中元 $-x$, 将 G 中元 $-x$ 记为 x'.

另一方面，G 可视为 $\mathbf{H}$ 的乘法群 $\mathbf{H}^*$ 的子群 (将 G 中元 x' 等同于 $\mathbf{H}$ 中元 $(-1)x$, $\forall x \in \{e, i, j, k\}$). 对于任一 $g \in G$, $y \in \mathbf{H}$. 定义 g 在 y 上的作用为 $\mathbf{H}$ 中积 gy. 则 $\mathbf{H}$ 是 G 的 $\mathbf{R}$- 表示，即 $\mathbf{H}$ 是左 $\mathbf{R}G$- 模. 由于 $\mathbf{H}$ 是可除代数，故 $\mathbf{H}$ 是不可约左 $\mathbf{R}G$- 模，于是得到 G 的 4 次不可约实表示 $\mathbf{H}$.

令 $H = G' = \langle -e\rangle$, σ 是 H 的 1 次实表示且非单位表示. 则 $\sigma(-e) = -1$. 下证作为 G 的 $\mathbf{R}$- 表示有同构 $\sigma^G \cong \mathbf{H}$, 从而 $\mathbf{H}$ 是单项表示.

因 G 有左陪集分解 $G = H \cup iH \cup jH \cup kH$, 故 $e \otimes 1$, $i \otimes 1$, $j \otimes 1$, $k \otimes 1$ 是 σ^G 的 $\mathbf{R}$- 基. 令 π: $\sigma^G \to \mathbf{H}$ 是将 $x \otimes 1$ 映到 x 的 $\mathbf{R}$- 线性同构，$\forall x \in \{e, i, j, k\}$. 只要证明 π 也是 $\mathbf{R}G$- 模同态. $\forall g \in G$, $x \in \{e, i, j, k\}$, 若 $gx \in \{e, i, j, k\}$, 则 $\pi(g(x \otimes 1)) =$

$\pi(gx\otimes 1)=gx=g\pi(x\otimes 1)$ (这是因为 $\mathbf{R}G$ 中的积 gx 与 $\mathbf{H}$ 中的积 gx 是一致的).

若 $gx\in\{-e,-i,-j,-k\}$, 则延用上述记号有 $gx=y'$, $y\in\{e,i,j,k\}$. 要注意的是在 $\mathbf{R}G$ 中 $y'\neq(-1)y$, 其中 $-1\in\mathbf{R}$. 由定义有

$$\begin{aligned}\pi(g(x\otimes 1))&=\pi(gx\otimes 1)=\pi(y'\otimes 1)\\&=\pi(y(-e)\otimes_{\mathbf{R}H}1)=\pi(y\otimes_{\mathbf{R}H}(-e)1)\\&=\pi(y\otimes(-1))=-\pi(y\otimes 1)\\&=-y;\end{aligned}$$

而在 $\mathbf{H}$ 中有 $g\pi(x\otimes 1)=gx=y'=-y$. 这表明 π 是左 $\mathbf{R}G$- 模同构.

为了证明 ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 和 $\mathbf{H}$ 是 G 的全部不可约实表示, 根据推论 I.6.3, 只要证明 $\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}G}(\mathbf{H},\mathbf{H})=4$ 即可.

因为 H 是 G 的正规子群. 故 $x\mathbf{R}H\otimes_{\mathbf{R}H}\mathbf{R}$, $x\in\{e,i,j,k\}$, 均为左 $\mathbf{R}H$- 模, 并且有左 $\mathbf{R}H$- 模同构 $x\mathbf{R}H\otimes_{\mathbf{R}H}\mathbf{R}\simeq\sigma$, 从而有左 $\mathbf{R}H$- 模同构

$$\begin{aligned}\sigma^{G}&\cong(\mathbf{R}H\otimes_{\mathbf{R}H}\mathbf{R})\oplus(i\mathbf{R}H\otimes_{\mathbf{R}H}\mathbf{R})\\&\quad\oplus(j\mathbf{R}H\otimes_{\mathbf{R}H}\mathbf{R})\oplus(k\mathbf{R}H\otimes_{\mathbf{R}H}\mathbf{R})\\&\cong\sigma\oplus\sigma\oplus\sigma\oplus\sigma.\end{aligned}$$

再由模的 Frobenius 互反律得到

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}H}(\mathbf{H},\mathbf{H})&=\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}H}(\sigma^{G},\sigma^{G})\\&=\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}H}(\sigma,\sigma\oplus\sigma\oplus\sigma\oplus\sigma)\\&=4\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}H}(\sigma,\sigma)\\&=4.\end{aligned}$$

因此 G 有五个不可约实表示 ρ_1、ρ_1，ρ_1，ρ_1，$\mathbf{H}$，次数分别为 1,1,1,1,4 (读者可写出其实特征标表). 注意，G 亦有五个不可约复表示，但次数分别为 1,1,1,1,2, 参见 II.4.3.

2.6　例　设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, H 是 G 的任一子群，m,n 分别是 H 和 G 的不可约 F- 表示的维数的最大值. 则有如下估值：

$$m \le n \le [G:H]m.$$

事实上，设 τ 是 H 的不可约 F- 表示，$\deg\tau = m$; ρ 是 G 的不可约 F- 表示，$\deg\rho = n$. 令 χ 是 τ^G 的一个不可约分支. 则

$$\mathrm{Hom}_{FH}(\tau, \chi_H) \cong \mathrm{Hom}_{FG}(\tau^G, \chi) \neq 0.$$

因 $\mathrm{char}F \nmid |H|$, 故 χ_H 是完全可约表示，于是 τ 是 χ_H 的直和项. 从而

$$m = \deg\tau \le \deg(\chi_H) = \deg\chi \le n.$$

再令 χ 是 ρ_H 的一个不可约分支. 则

$$\mathrm{Hom}_{FG}(\chi^G, \rho) = \mathrm{Hom}_{FH}(\chi, \rho_H) \neq 0.$$

因 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, 故 ρ 是 χ^G 的直和项. 从而

$$n = \deg\rho \le \deg(\chi^G) = [G:H]\deg\chi \le [G:H]m.$$

特别地，若 H 是 Abel 群且 F 代数闭，则 $m = 1$. 由此得到 $n \le [G:H]$. 这已在 II.3.8 中得到.

习　题

1. 设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, $H \le K \le G$, $\eta \in \mathrm{cf}_F(H)$. 证明：$(\eta^K)^G = \eta^G$.

2. 设 $\mathrm{char}F\nmid|G|$, $\eta\in \mathrm{cf}_F(H)$. 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\eta_i\right)^G=\sum_{i=1}^{s}a_i\eta_i^G,\quad a_i\in F,\ 1\le i\le s.$$

3. 设 $\mathrm{char}F\nmid|G|$, $\eta\in \mathrm{cf}_F(H)$, $\xi\in \mathrm{cf}_F(G)$. 证明:

$$\eta^G\cdot\xi=(\eta\cdot\xi_H)^G.$$

4. 设 $\mathrm{char}F\nmid|G|$, $\{g_1,\cdots,g_r\}$ 是 G 关于子群 H 的左陪集的一个代表系, $\eta\in \mathrm{cf}_F(H)$. 则

$$\eta^G(g)=\sum_{i=1}^{r}\dot{\eta}(g_i^{-1}gg_i),\quad \forall g\in G.$$

5. 设 $\mathrm{char}F\nmid|G|$, $\eta\in \mathrm{cf}_F(H)$. $g\in G$ 所在的共轭类为 C_g. 证明:

$$\eta^G(g)=\frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{h\in C_g\cap H}\eta(h),\quad \forall g\in G.$$

(当 $C_g\cap H$ 为空集时, 上式右端理解为 0.)

6. 设 $G=HK,H,K$ 均为 G 的子群, $\mathrm{char}F\nmid|G|$, $\eta\in \mathrm{cf}_F(H)$. 证明:

$$(\eta^G)_K=(\eta_{H\cap K})^K.$$

7. 证明 Frobenius 互反律刻画了类函数的诱导, 即若 $\eta\in \mathrm{cf}_F(H)$, $\eta'\in \mathrm{cf}_F(G)$, 且满足

$$(\eta',\xi)_G=(\eta,\xi_H)_H,\quad \forall\xi\in \mathrm{cf}_F(G).$$

则 $\eta'=\eta^G$, 其中 $\mathrm{char}F\nmid|G|$ 且 F 是 G 的分裂域.

8. 证明 S_4 的 2 维不可约复表示是单项表示. [提示: 考虑 A_4 的 1 次表示.]

§3　Mackey 的子群定理

设 H, K 是 G 的子群，(W, ρ) 是 H 的 F- 表示．本节的目的是确定诱导表示 ρ^G 在 K 上的限制表示 $(\rho^G)_K$.

3.1　设 $g \in G$. 令 ${}^gH := gHg^{-1}$. 则 ${}^gW := (W, {}^g\rho)$ 是 ${}^gH$ 的 F-表示，其中

$${}^g\rho(x) := \rho(g^{-1}xg), \quad \forall x \in {}^gH.$$

称 ${}^gW$ 是 (W, ρ) 的共轭表示.

3.2　设 D 是 G 的 (K, H) 双陪集的一个代表系，即 $D \subseteq G$ 且有无交并

$$G = \bigcup_{a \in D} KaH.$$

对 $a \in D$, ${}^aW$ 是 ${}^aH$ 的 F- 表示，将其限制在子群 ${}^aH \cap K$ 上，于是我们得到诱导表示 $(({}^aW)_{{}^aH\cap K})^K$.

定理 (Mackey 的子群定理)　存在 FK- 模同构

$$(W^G)_K \cong \bigoplus_{a \in D} (({}^aW)_{{}^aH\cap K})^K;$$

并且 $(({}^aW)_{{}^aH\cap K})^K$ 并不依赖于 D 的选取，即若 $KbH = KaH$, 则有 FK- 模同构

$$(({}^bW)_{{}^bH\cap K})^K \cong (({}^aW)_{{}^aH\cap K})^K.$$

注　上述定理将 W^G 在 K 上的限制表示归结为若干 K 的子群 ${}^aH \cap K$ 的表示 $({}^aW)_{{}^aH\cap K}$ 的诱导表示的直和，这种递归的意义是不言自明的.

证 设 $\{k_{aj} \mid 1 \le j \le r_a\}$ 是 K 关于 ${}^aH \cap K$ 的左陪集的一个代表系. 则 $\{k_{aj} \cdot a \mid 1 \le j \le r_a\}$ 是 KaH 中 H 的左陪集的一个代表系, 即有无交并

$$KaH = (k_{a1} \cdot a)H \cup \cdots \cup (k_{ar_a} \cdot a)H.$$

(请读者自证.) 由此即得 G 关于 H 的左陪集的代表系

$$\{k_{aj} \cdot a \mid a \in D,\ 1 \le j \le r_a\}.$$

于是由诱导表示的刻画得到 F- 空间的直和分解

$$W^G = FG \otimes_{FH} W = \bigoplus_{a \in D} \bigoplus_{1 \le j \le r_a} (k_{aj} \cdot a \otimes_{FH} W).$$

令 $W(a) := \bigoplus\limits_{1 \le j \le r_a} (k_{aj} a \otimes_{FH} W)$. 则

$$W(a) = F(KaH) \otimes_{FH} W.$$

由此看出 $W(a)$ 是 K 的 F- 表示. 只要证明有左 FK- 模同构

$$W(a) \cong (({}^aW)_{{}^aH \cap K})^K. \qquad (*)$$

注意到 $W(a)$ 在 ${}^aH \cap K$ 上的限制表示有子表示 $a \otimes_{FH} W$, 而且有左 $F({}^aH \cap K)$- 模同构 $a \otimes_{FH} W \simeq {}^aW$. 事实上, $\forall x = aha^{-1} \in {}^aH \cap K$, 其中 $h \in H$, 则由定义有

$$\begin{aligned} x(a \otimes_{FH} w) &= xa \otimes_{FH} w = ah \otimes_{FH} w \\ &= a \otimes_{FH} \rho(h)w, \ \forall w \in W; \end{aligned}$$

$$xw = {}^a\rho(x)w = \rho(a^{-1}xa)w = \rho(h)w, \ \forall w \in {}^aW.$$

这表明映射 $a \otimes_{FH} w \mapsto w$ 是 $a \otimes_{FH} W$ 到 ${}^aW$ 的 $F({}^aH \cap K)$- 模同构.

因 $W(a) = \bigoplus_{1\le j\le r_a} k_{aj}(a \otimes_{FH} W)$, 且 $\{k_{aj} \mid 1 \le j \le r_a\}$ 是 K 关于 ${}^aH \cap K$ 的左陪集的代表系，故由定理 1.5 即得 (*).

最后，若 $KbH = KaH$, 则由上述证明知

$$\begin{aligned}\left(({}^bW)_{{}^bH\cap K}\right)^K &\simeq W(b) = F(KbH) \otimes_{FH} W\\ &= F(KaH) \otimes_{FH} W = W(a)\\ &\cong \left(({}^aW)_{{}^aH\cap K}\right)^K.\end{aligned}$$ □

令 χ 是 ρ 的特征标. 则 ${}^aW$ 的特征标为 ${}^a\chi$: ${}^aH \to F$, 其中

$${}^a\chi(x) = \chi(a^{-1}xa), \quad \forall x \in {}^aH.$$

于是得到上述定理的特征标形式:

3.3　推论　延用上述记号. 则

$$(\chi^G)_K = \sum_{a\in D} \left(({}^a\chi)_{{}^aH\cap K}\right)^K.$$

注　读者可将上述 χ 换成 H 上的任一类函数，相应的公式仍成立.

在定理 3.2 中令 $K = H \lhd G$, 即得到

3.4　推论　设 $H \lhd G$. 则有 FH- 模同构

$$(W^G)_H \cong \bigoplus_{a\in R} {}^aW$$

其中 R 是 G 关于 H 的左陪集的一个代表系；其特征标形式为

$$(\chi^G)_H = \sum_{a\in R} {}^a\chi.$$

这表明正规子群 H 的表示 (W, ρ) 的诱导表示 W^G 在 H 上的限制恰是 W 的全部共轭表示 ${}^aW$, $a \in R$, 的直和.

在定理 3.2 中取 W 是 H 的单位表示 $\mathbf{1}_H$, 则得到

3.5 推论 有 FK- 模同构

$$(1_H^G)_K \cong \bigoplus_{a\in D} 1^K_{{}^aH\cap K}.$$

3.6 设 χ 是 H 的 F- 特征标, η 是 K 的 F- 特征标. 子群定理和 Frobenius 互反律也为计算 $(\chi^G,\eta^G)_G$ 提供了递归的公式. 事实上, 设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, 则

$$\begin{aligned}(\chi^G,\eta^G)_G &= (\eta^G,\chi^G)_G\\ &= (\eta,(\chi^G)_K)_K\\ &= \sum_{a\in D}(\eta,(({}^a\chi)_{{}^aH\cap K})^K)_K\\ &= \sum_{a\in D}(\eta_{{}^aH\cap K},({}^a\chi)_{{}^aH\cap K})_{{}^aH\cap K}.\end{aligned}$$

习 题

1. G 的单项表示在子群 H 上的限制是 H 的单项表示的直和.

2. 设 $\mathrm{char}F=0$. 证明: $(\mathbf{1}_H^G,\mathbf{1}_K^G)_G$ 等于 G 的 (K,H) 双陪集的个数 (当然也是 G 的 (H,K) 双陪集的个数). [提示: 利用 Frobenius 互反律和 Mackey 子群定理.]

3. 设 $\mathrm{char}F\nmid|G|, H, K$ 是 G 的子群, $\eta\in \mathrm{cf}_F(H)$, $\xi\in\mathrm{cf}_F(K)$. 则

$$(\eta^G)_K = \sum_{a\in D}(({}^a\eta)_{{}^aH\cap K})^K;$$

且

$$(\eta^G, \xi^G)_G = \sum_{a\in D} (({}^a\eta)_{{}^aH\cap K}, \xi_{{}^aH\cap K})_{{}^aH\cap K},$$

其中 D 是 G 的 (K,H) 双陪集的代表系; ${}^a\eta \in \mathrm{cf}_F({}^aH)$, 其中 ${}^a\eta(x) = \eta(a^{-1}xa)$, $\forall x \in {}^aH$.

4. (模的 Frobenius 互反律的另一种形式) 设 H 是 G 的子群, M 是 FG- 模, N 是 FH- 模. 则有 F- 线性同构

$$\mathrm{Hom}_{FG}(M, N^G) \simeq \mathrm{Hom}_{FH}(M_H, N).$$

[提示: 对于 $\forall\varphi \in \mathrm{Hom}_{FG}(M, N^G)$, $m \in M$, 存在 $\theta_i \in \mathrm{Hom}_F(M, N)$ 使得 $\varphi(m) = \sum\limits_{i=1}^{r} g_i \otimes \theta_i(m)$, 其中 $\{g_1 = 1, \cdots, g_r\}$ 是 G 关于 H 的左陪集的一个代表系. 证明 $\theta_1 \in \mathrm{Hom}_{FH}(M_H, N)$ 且 $\theta_i = \theta_1 g_i^{-1}$.]

5. (交结数定理) 设 H, K 是 G 的子群, M, N 分别是 FG-模和 FH- 模, D 是 G 的 (H,K) 双陪集的代表系. 则有 F- 同构

$$\mathrm{Hom}_{FG}(M^G, N^G) \cong \bigoplus_{a\in D} \mathrm{Hom}_{F(H\cap {}^aK)}(M, N);$$

并且, 若 $x, y \in G, x^{-1}y = a$, 则有 F- 同构

$$\mathrm{Hom}_{F({}^xH\cap {}^yK)}({}^xM, {}^yN) \cong \mathrm{Hom}_{F(H\cap {}^aK)}(M, N).$$

[提示: 利用子群定理、 Frobenius 互反律和上一题的结论.]

6. 设 F 是特征零的域, H, K, M, N, D 同上, χ_1, χ_2 分别是 M, N 的特征标. 则

$$(\chi_1^G, \chi_2^G)_G = \sum_{a\in D} (\chi_1, \chi_2)_{H\cap {}^aK}.$$

[提示: 利用上一题的结论和引理 II.2.4(ii).]

§4 诱导表示不可约的判定

前面已看到，即使单项表示也未必不可约. 本节给出诱导表示的不可约性判别法则.

称 G 的两个 F- 表示 M,N 互不相交，若 M,N 没有共同的不可约直和项 (同构下意义的). 当 $\mathrm{char}F=0$ 时，由 Maschke 定理和第一正交关系知 M 与 N 互不相交当且仅当 $(\chi_M,\chi_N)_G=0$.

设 H 是 G 的子群，(W,ρ) 是 H 的 F- 表示. 则 ${}^g\rho$ 是 ${}^gH=gHg^{-1}$ 的 F- 表示. 于是得到 ρ 和 ${}^g\rho$ 在 $H\cap {}^gH$ 上的限制表示 $\rho_{H\cap {}^gH}$ 和 $({}^g\rho)_{H\cap {}^gH}$.

4.1 定理 (Mackey 的不可约性法则) 设 $\mathrm{char}F=0$ 且 F 是 G 与 H 的分裂域. 则 ρ^G 不可约当且仅当下述两条成立:

(i) ρ 不可约;

(ii) 对任一 $g\in G-H$, $\rho_{H\cap {}^gH}$ 和 $({}^g\rho)_{H\cap {}^gH}$ 互不相交.

证 设 χ 是 ρ 的特征标. 对于任一 $g\in G-H$, 取 G 的 (H,H) 双陪集的一个代表系 D_g 使得 $g\in D_g$. 由 3.6 知

$$\begin{aligned}(\chi^G,\chi^G)_G&=\sum_{a\in D_g}(\chi_{H\cap {}^aH},({}^a\chi)_{H\cap {}^aH})_{H\cap {}^aH}\\&=(\chi,\chi)_H+\sum_{a\in D_g,a\notin H}(\chi_{H\cap {}^aH},({}^a\chi)_{H\cap {}^aH})_{H\cap {}^aH}.\end{aligned}$$

因为 $(\chi,\chi)_H>0$, 故由定理 II.2.8 知

$$\begin{aligned}\rho^G\text{ 不可约}\ &\Leftrightarrow\ (\chi^G,\chi^G)_G=1\\&\Leftrightarrow\ (\chi,\chi)_H=1,\ (\chi_{H\cap {}^aH},({}^a\chi)_{H\cap {}^aH})_{H\cap {}^aH}=0,\\&\qquad\forall a\in D_g,a\notin H\\&\Leftrightarrow\ \rho\text{ 不可约且 }\rho_{H\cap {}^gH}\text{ 与 }({}^g\rho)_{H\cap {}^gH}\text{ 互不相交},\\&\qquad\forall g\in G-H.\end{aligned}$$

□

注　上述定理中，$\mathrm{char}F = 0$ 可减弱成 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 不过证明要用到 Mackey 的张量积定理 (可参见 [CR2], p.240; 或 [CS], p.158).

若 $H \lhd G$, 且定理 4.1 中条件 (i) 成立，则条件 (ii) 等于说 "$\rho \not\cong {}^g\rho$, $\forall g \in G - H$". 因此得到

4.2　推论　设 $H \lhd G$, $\rho \in R_F^+(H)$, $\mathrm{char}F = 0$ 且 F 是 G 与 H 的分裂域. 则 ρ^G 不可约当且仅当 ρ 不可约且 $\rho \not\cong {}^g\rho$, $\forall g \in G - H$.

4.3　推论　设 $\mathrm{char}F = 0$ 且 F 是 G 与 H 的分裂域，$\rho = \sigma^G$ 是 G 的单项 F- 表示，其中 σ 是 H 的 1 次表示. 则 ρ 不可约当且仅当对于任一 $g \in G - H$, 存在 $h \in H \cap {}^gH$ 使 $\sigma(h) \neq \sigma(g^{-1}hg)$.

下面我们利用诱导特征标的不可约判定法则给出某些群的不可约特征标的信息，这些群包括 §7 中要讨论的 Frobenius 群. 为此先给出 Brauer 的一个定理.

4.4　定理(Brauer)　设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 且 F 是 G 的分裂域. 设 A 是一个群，且 A 在 $\mathrm{Irr}_F(G)$ 和 G 的共轭类集合 ℓ 上有一个作用，满足如下条件:

$$(a\chi)(aC) = \chi(C), \quad \forall a \in A, \ \chi \in \mathrm{Irr}_F G, \ C \in \ell,$$

此处 $\chi(C)$ 指类函数 χ 在类 C 上的值. 则

$$|\{\chi \in \mathrm{Irr}_F G \mid a\chi = \chi\}| = |\{C \in \ell \mid aC = C\}|, \quad \forall a \in A.$$

证　令 X 是 G 的 F- 特征标表作成的矩阵. 则 $a \in A$ 在 $\mathrm{Irr}_F G$ 和 ℓ 上的作用分别引起 X 的行与列的置换: 将 χ 所在的行置换到 $a\chi$ 所在的行，将 C 所在的列置换到 aC 所在的列. 故存在唯一的置换阵 $Y(a)$ 和 $Z(a)$, 使得 $Y(a)X$ 等于对 X 施行了 a 引起的

行置换后得到的新矩阵, $XZ(a)$ 等于对 X 施行了 a 引起的列置换后得到的新矩阵. 因为

$$(a\chi)(C) = \chi(a^{-1}C), \quad \forall \chi \in \mathrm{Irr}_F G, \ C \in \ell,$$

故

$$Y(a)X = XZ(a^{-1}).$$

由特征标的正交关系知 X 是可逆矩阵, 从而 $Y(a)$ 与 $Z(a^{-1})$ 有相同的迹. 而 $Y(a)$ 的迹等于被置换 a 固定的行的个数; $Z(a^{-1})$ 的迹等于被置换 a^{-1} 固定的列的个数. 因此即得

$$\begin{aligned}|\{\chi \in \mathrm{Irr}_F G \mid a\chi = \chi\}| &= |\{C \in \ell \mid a^{-1}C = C\}| \\ &= |\{C \in \ell \mid aC = C\}|.\end{aligned}$$

□

4.5 设 $H \lhd G$. 则 G 可作用在 $\mathrm{Irr}_F H$ 和 H 的共轭类集合 ℓ 上 (注意, ℓ 是 H 的共轭类的集合而并非 H 的共轭子群的集合): $\forall g \in G, \ \psi \in \mathrm{Irr}_F H, \ C \in \ell$, 定义

$$g\psi := {}^g\psi, \quad gC = \{gxg^{-1} \mid x \in C\}.$$

下述定理给出了满足某类条件的群的特征标的性质, 它在 §7 中有应用.

定理 设 $H \lhd G$, $C_G(h) \subseteq H$, $\forall 1 \neq h \in H$. 设 $\mathrm{char}F = 0$ 且 F 是 G 与 H 的分裂域.

(i) 若 $\mathbf{1}_H \neq \psi \in \mathrm{Irr}_F H$, 则 $\psi^G \in \mathrm{Irr}_F G$.

(ii) 若 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$ 且 $H \nsubseteq \mathrm{Ker}\chi$, 则存在 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$ 使得 $\chi = \psi^G$.

证 (i) 由推论 4.2 知, 欲证 ψ^G 不可约, 只要证明 ${}^g\psi \neq \psi$, $\forall g \in G - H$, 即要证明 $\forall g \in G - H$, 有

$$|\{\varphi \in \mathrm{Irr}_F G \mid {}^g\varphi = \varphi\}| = |\{\mathbf{1}_H\}| = 1.$$

由定理 4.4 知只要证明

$$|\{C \in \ell \mid gCg^{-1} = C\}| = 1$$

即可，即要证明若 $C \neq \{1\}$, $gCg^{-1} \neq C$, $\forall g \in G - H$.

取 $1 \neq h \in C$. 则 $h \notin gCg^{-1}$. 否则，存在 $x \in H$ 使得 $h = g(xhx^{-1})g^{-1}$, 即 $gx \in C_G(h) \subseteq H$. 故 $g \in H$. 矛盾！这就证明了 $C \neq gCg^{-1}$.

(ii) 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$, $H \nsubseteq \mathrm{Ker}\chi$. 则存在 $\psi \in \mathrm{Irr}_F H$, $\psi \neq \mathbf{1}_H$ 且 ψ 是 χ_H 的不可约分支. 于是由 (i) 知 $\psi^G \in \mathrm{Irr}_F G$. 再由 Frobenius 互反律知 $(\chi, \psi^G) = (\chi_H, \psi) \neq 0$. 这迫使 $\chi = \psi^G$. □

习　题

1. 设 F 是有限域，$G = SL_2(F)$, 即 F 上行列式为 1 的 2 阶矩阵的乘法群，H 是 G 的上对角子群. 令 $\omega: F^* \to \mathbf{C}^*$ 是一个群同态. 设 χ_ω 是 H 的 1 次特征标，其定义为

$$\chi_\omega\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \omega(a), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H.$$

证明：若 $\omega^2 \neq 1$, 则 χ_ω^G 是 G 的不可约特征标.

2. 利用推论 4.2 重新给出二面体群 D_n 的不可约表示.

§5 Clifford 定理

5.1 定理(Clifford)　设 F 是任一域，$(V, \rho) \in \overline{\mathrm{Irr}_F} G$, $N \lhd G$.

(i) (V, ρ_N) 是 N 的完全可约表示，且 ρ_N 的不可约直和项均互相共轭且重数相同，记为 m.

(ii) 设 σ 是 ρ_N 的一个不可约分支. 令 $G_\sigma = \{g \in G \mid {}^g\sigma \cong \sigma\}$. 则 $G_\sigma \supseteq N$, 且 $m\sigma \in \overline{\mathrm{Irr}_F} G_\sigma$, $\rho \cong (m\sigma)^G$.

特别地, 若 $G_\sigma = G$, 则 $\rho_N = m\sigma$.

注 当 $G_\sigma \neq G$ 时, 上述定理表明 ρ 是真子群 G_σ 的不可约表示 $m\sigma$ 的诱导表示.

证 (i) 设 U 是 ρ_N 的不可约子模, 将 ρ_N 在 U 上的限制记为 σ. 则 $\sum\limits_{g\in G} gU$ 是 (V,ρ) 的子表示. 因此 $V = \sum\limits_{g\in G} gU$. 因为

$$n(gU) = g(g^{-1}ng)U \subseteq gU, \quad \forall n \in N,$$

故 gU 是 N 的 F- 表示. 将 ρ_N 在 gU 上的限制记为 σ'. 则 $f: U \to gU$, $f(u) = gu$, $\forall u \in U$, 是 $(U, {}^g\sigma)$ 到 (gU, σ') 的 N- 模同构. 于是 (V, ρ_N) 是 N 的不可约表示的和, 从而 ρ_N 是 N 的完全可约表示, 且其不可约分支互相共轭.

将 (V, ρ_N) 写成 $\bigoplus\limits_i V_i$ 的形式, 其中 V_i 是 ρ_N 的所有互相同构的不可约分支的直和, 称为 ρ_N 的齐次分支. 则 V_i 是若干 gU 的直和. 注意到若 g_1U 与 g_2U 是同构的 N 的表示, 则 $g(g_1U)$ 与 $g(g_2U)$ 亦是同构的 N 的表示. 这就推出 G 通过 ρ 作用在 ρ_N 的齐次分支的集合上, 并且这一作用是可迁的, 即 $\forall i, j$, 均存在 $g \in G$ 使得 $gV_i = V_j$. 从而推出 ρ_N 的不可约分支均有相同的重数.

(ii) 显然 G_σ 是 G 的子群. 对于任一 $n \in N$, 直接验证可知映射 $f: (U,\sigma) \to (U, {}^n\sigma)$, 其中 $f(u) = n^{-1}u$, $\forall u \in U$, 是 (U,σ) 到 $(U, {}^n\sigma)$ 的 N- 模同构. 这表明 $N \subseteq G_\sigma$.

令 V_0 是 ρ_N 的所有与 (U,σ) 互相同构的不可约分支的直和. 则有 N- 模同构 $V_0 \cong mU$. 注意到 $V_0 = \sum\limits_{g\in G_\sigma} gU$, 因此 V_0 是 G_σ

的表示. 令 $\{g_1, \cdots, g_r\}$ 是 G 关于 G_σ 的左陪集的一个代表系. 则

$$\begin{aligned} V = \sum_{g\in G} gU &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{g\in g_i G_\sigma} gU \\ &= \sum_{i=1}^{r} g_i \left(\sum_{g\in G_\sigma} gU \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} g_i V_0 \\ &= \bigoplus_{i=1}^{r} g_i V_0, \end{aligned}$$

从而由定理 1.5 知 $V = V_0^G$, 即 $\rho \cong (m\sigma)^G$. 因 ρ 不可约, 故 $m\sigma \in \overline{\mathrm{Irr}_F} G_\sigma$. □

利用 Clifford 定理可以得到有限群不可约复表示维数的又一信息, 它是定理 II.6.8 的推广.

5.2　定理(Ito)　设 $N \lhd G$, $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G$. 若 χ_N 有 1 次不可约分支, 则 $\chi(1) \mid [G:N]$.

证　设 χ_N 有 1 次不可约分支 μ. 则由 Clifford 定理知

$$\chi(1) = [G:G_\mu]\cdot m\cdot (\deg\mu) = [G:G_\mu]\cdot m.$$

令 $\gamma = m\mu \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G_\mu$. 则 $|\gamma(n)| = m|\mu(n)| = m = \gamma(1)$, $\forall n \in N$. 从而 $n \in Z(\gamma)$, 即 $N \subseteq Z(\gamma)$. 由习题 II.6.4 知

$$\gamma(1) \mid [G_\mu : Z(\gamma)],$$

从而 $m \mid [G_\mu : N]$. 于是 $\chi(1) \mid [G:G_\mu][G_\mu:N]$, 即 $\chi(1) \mid [G:N]$. □

5.3 推论 设 $N \lhd G$ 且 N 是 Abel 群. 则 G 的任一复表示的维数整除 $[G:N]$.

习　　题

1. 设 $N \lhd G$, $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}_F}N$, $\mathrm{char}F = 0$ 且 F 是 G 与 N 的分裂域. 证明:

$$\rho^G \in \overline{\mathrm{Irr}_F}G \iff G_\rho = N.$$

[提示: 利用推论 4.2.]

2. (Blichfeldt) 设 $N \lhd G$ 且 N 是 Abel 群且 $N \not\subseteq Z(G)$, $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}_F}G$ 且 ρ 是忠实的. 设 F 是 N 的分裂域. 证明 ρ 是 G 的某一真子群的不可约表示的诱导表示. [提示: 令 σ 是 ρ_N 的不可约分支. 证明 $G_\sigma \neq G$.]

3. 设 $N \lhd G$, $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}_F}G$. 则单位表示 $\mathbf{1}_N$ 是 ρ_N 的不可约分支当且仅当 $N \subseteq \mathrm{Ker}\rho$.

§6 小　群　法

设 $N \lhd G$, H 是 G 的子群. 若 $G = NH$ 且 $N \cap H = \{1\}$, 或等价地, G 中任一元可唯一地写成 nh 的形式, 其中 $n \in N, h \in H$, 则称 G 是 N 与 H 的半直积, 记为 $G = N \rtimes H$.

本节总假设 $G = N \rtimes H$ 且 N 是 Abel 群, $\mathrm{char}F = 0$ 且 F 是 G 的所有子群的分裂域. 我们要证明 G 的不可约 F- 表示可以由 H 的某些子群的不可约 F- 表示构造出来, 这通常被称为 Wigner 和 Mackey 的 "小群" 法.

6.1 因为 N 是 Abel 群, 由引理 I.7.4 知 N 的不可约 F- 表示均是 1 维的. 因 $N \lhd G$, 故 G 在集合 $\overline{\mathrm{Irr}_F}N$ 上有作用

$$g\cdot\rho := {}^{g}\rho,\quad \forall g\in G,\ \ \rho\in\overline{\mathrm{Irr}_F}N.$$

设 $\{\rho_1,\cdots,\rho_r\}$ 是 $\overline{\mathrm{Irr}_F}N$ 的 H- 轨道的一个代表系. 令

$$H_i=\{h\in H \mid {}^{h}\rho_i\cong\rho_i\}.$$

因 ρ_i 是 1 次的, 故 ${}^{h}\rho_i\cong\rho_i$ 当且仅当 ${}^{h}\rho_i=\rho_i$.

令 $G_i=N\cdot H_i$. 定义 $\widetilde{\rho}_i: G_i\to F^*$, 其中 $\widetilde{\rho}_i(nh)=\rho_i(n)$, $\forall n\in N, h\in H_i$. 则易验证 $\widetilde{\rho}_i$ 是 G_i 的 1 次 F- 表示 (将验证细节留给读者).

另一方面, 设 (W,ψ) 是 H_i 的不可约 F- 表示. 因 $G_i/N\cong H_i$, 故 ψ 是 G_i/N 的不可约 F- 表示, 将其提升为 G_i 的不可约表示 $(W,\widetilde{\psi})$, 即 $\widetilde{\psi}(nh)=\psi(h)$, $\forall n\in N, h\in H_i$.

作 $\widetilde{\rho}_i$ 与 $\widetilde{\psi}$ 的张量积, 得到 G_i 的不可约表示 $\widetilde{\rho}_i\otimes\widetilde{\psi}$, 从而得到诱导表示

$$\theta_{i,\psi}:=(\widetilde{\rho}_i\otimes\widetilde{\psi})^G.$$

6.2　定理　延用上述记号. 则有

(i) $\theta_{i,\psi}\cong\theta_{i',\psi'} \iff i=i',\ \psi\cong\psi'$.

(ii) $\overline{\mathrm{Irr}_F}G=\{\theta_{i,\psi}\mid \psi\in\overline{\mathrm{Irr}_F}H_i,\ 1\le i\le r\}$.

从而由 G 的子群 H_i 的不可约表示与 N 的不可约表示便可构造出 G 的全部不可约表示.

证　(i) 设 $\{n_1h_1,\cdots,n_th_t\}$ 是 G 的 (N,G_i) 双陪集的一个代表系, 其中 $n_j\in N, h_j\in H$. 则 $\{h_1,\cdots,h_t\}$ 是 G 关于 G_i 的左陪集的一个代表系 (请读者自行验证). 因 $N\lhd G$, 故有

$$\begin{aligned}G&=\bigcup_{j=1}^{t}h_jG_i=\bigcup_{j=1}^{t}h_jNH_i=\bigcup_{j=1}^{t}Nh_jH_i\\&=N\left(\bigcup_{j=1}^{t}h_jH_i\right),\end{aligned}$$

从而 $H = \bigcup_{j=1}^{t} h_j H_i$, 即 $\{h_1, \cdots, h_t\}$ 是 H 关于 H_i 的左陪集的一个代表系. 于是 $H\rho_i = \{{}^{h_1}\rho_i, \cdots, {}^{h_t}\rho_i\}$ 是 ρ_i 的 H- 轨道.

注意到 $({}^{n_j h_j}G_i) \cap N = N$. 由 Mackey 的子群定理得到 $\theta_{i,\psi}$ 在 N 上的限制为

$$(\theta_{i,\psi})_N = \left((\widetilde{\rho}_i \otimes \widetilde{\psi})^G\right)_N = \bigoplus_{j=1}^{t} \left({}^{n_j h_j}(\widetilde{\rho}_i \otimes \widetilde{\psi})\right)_N .$$

${}^{n_j h_j}(\widetilde{\rho}_i \otimes \widetilde{\psi})$ 的表示空间为 $F \otimes W \cong W$. 对于任一 $n \in N$, 因为 N 是 Abel 群且 $N \lhd G$, 故有

$$\begin{aligned} {}^{n_j h_j}(\widetilde{\rho}_i \otimes \widetilde{\psi})(n) &= (\widetilde{\rho}_i \otimes \widetilde{\psi})(h_j^{-1} n_j^{-1} n n_j h_j) \\ &= (\widetilde{\rho}_i \otimes \widetilde{\psi})(h_j^{-1} n h_j) \\ &= ({}^{h_j}\rho_i)(n) \otimes \widetilde{\psi}(h_j^{-1} n h_j) \\ &= ({}^{h_j}\rho_i)(n) \otimes \psi(1) \\ &= ({}^{h_j}\rho_i \otimes 1_N)(n), \end{aligned}$$

从而 $(\theta_{i,\psi})_N = \left(\bigoplus_{j=1}^{t} {}^{h_j}\rho_i\right) \otimes \mathbf{1}_N$, 这里 $\mathbf{1}_N$ 指 $(W, \mathbf{1}_N)$.

设有 G- 模同构 $\theta_{i,\psi} \cong \theta_{i',\psi'}$, 其中 (W', ψ') 是 $H_{i'}$ 的不可约表示. 则 $(\theta_{i,\psi})_N$ 的特征标为

$$\chi = \left(\sum_{j=1}^{t} {}^{h_j}\rho_i\right) \dim_F W;$$

$(\theta_{i',\psi'})_N$ 的特征标为

$$\chi' = \sum_{j=1}^{t'} ({}^{h'_j}\rho_{i'}) \dim_F W',$$

此处为避免复杂的记号，仍用 ρ_i 表示 ρ_i 的特征标. 因此

$$(\chi, \chi')_N = (\chi, \chi)_N = t(\dim_F W)^2 \neq 0.$$

若 $i \neq i'$, 则 ρ_i 的 H- 轨道与 $\rho_{i'}$ 的 H- 轨道交为空集，于是由正交关系知 $({}^{h_j}\rho_i, {}^{h'_j}\rho_{i'}) = 0$, 从而 $(\chi, \chi') = 0$, 矛盾.

剩下只要证：若 $\theta_{i,\psi} \cong \theta_{i,\psi'}$, 则 $\psi \cong \psi'$.

设 $\theta_{i,\psi}$ 的表示空间为 V. 则 $V = FG \otimes_{FG_i} (F \otimes W)$. 令

$$V_i = \{v \in V \mid \theta_{i,\psi}(n)v = \rho_i(n)v, \quad \forall n \in N\}.$$

则易验证 V_i 是 H_i 的 F- 表示. 事实上，设 $h \in H_i, v \in V_i$, 则有

$$\begin{aligned}
\theta_{i,\psi}(n)(hv) &= \theta_{i,\psi}(n)\theta_{i,\psi}(h) \cdot v \\
&= \theta_{i,\psi}(nh)v \\
&= \theta_{i,\psi}(h)\theta_{i,\psi}(h^{-1}nh)v \\
&\xlongequal{\text{由定义}} \theta_{i,\psi}(h)\rho_i(h^{-1}nh)v \\
&= {}^h\rho_i(n)\theta_{i,\psi}(h) \cdot v \\
&= \rho_i(n)(hv),
\end{aligned}$$

这里用到 $h^{-1}nh \in N$ 且 $\rho_i(n)$ 是倍乘以及 ${}^h\rho_i(n) = \rho_i(n)$. 这表明 $hv \in V_i$.

下面欲证有 H_i- 模同构 $V_i \cong (W, \psi)$. 设 W 的一组基为 $w_1, \cdots, w_m$. 则 $\{h_i \otimes 1 \otimes w_j | 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq m\}$ 是 V 的一组基.

设 $v = \sum\limits_{j,l} \lambda_{jl}(h_j \otimes 1 \otimes w_l) \in V$, 其中 $\lambda_{jl} \in F$. 则对于 $n \in N$

有

$$\begin{aligned}\theta_{i,\psi}(n)(v) &= \sum_{j,l}\lambda_{jl}(nh_j\otimes 1\otimes w_l)\\ &= \sum_{j,l}\lambda_{jl}(h_j\otimes h_j^{-1}nh_j(1\otimes w_l))\\ &= \sum_{j,l}\lambda_{jl}(h_j\otimes \rho_i(h_j^{-1}nh_j)1\otimes \psi(1)w_l)\\ &= \sum_{j,l}\lambda_{jl}{}^{h_j}\rho_i(n)(h_j\otimes 1\otimes w_l).\end{aligned}$$

比较系数即可知: $v\in V_i$ 当且仅当

$$\lambda_{jl}({}^{h_j}\rho_i(n)-\rho_i(n))=0,\quad \forall j,l.$$

设 $h_1=1$. 则当 $j\neq 1$ 时, $h_j\notin H_i$. 故存在 $n\in N$ 使 ${}^{h_j}\rho_i(n)-\rho_i(n)\neq 0$, 这推出 $\lambda_{jl}=0$. 这就证明了 $v\in V_i$ 当且仅当 $v=\sum\limits_l\lambda_l(1\otimes 1\otimes w_l)$.

令 $f: V_i\to W$, 其中 $f(1\otimes 1\otimes w_l)=w_l$. 则直接验证可知 f 是 H_i- 模同构. 我们将证明的细节留给读者.

若 $(V,\theta_{i,\psi})\cong(V',\theta_{i,\psi'})$, 即存在 G- 模同构 $g: V\to V'$, 则按上述方法同理可构造 V_i' 和 H_i- 模同构 $V_i'\cong W'$. 只要证明 g 也是 V_i 到 V_i' 的 H_i- 模同构就可以推出 $W\cong W'$, 即 $\psi\cong\psi'$.

为此, 设 $v\in V_i, n\in N$. 则

$$\begin{aligned}\theta_{i,\psi'}(n)(gv) &= g\theta_{i,\psi}(n)(v)\\ &= g\rho_i(n)v\\ &= \rho_i(n)(gv).\end{aligned}$$

即 $gv\in V_i'$. 这就证明了 (i).

(ii) 首先利用 Mackey 的诱导表示不可约判定法则证明 $\theta_{i,\psi}$ 不可约. 只要证明对于任一 $g\in G-G_i$, $G_i(g):=G_i\cap {}^gG_i$ 的两个特征标 $(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi})_{G_i(g)}$ 与 ${}^g(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi})_{G_i(g)}$ 互不相交即可, 此处仍用表示 $\widetilde{\rho}_i$ 来记相应的特征标. 为此只要证明 $(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi})_N$ 与 ${}^g(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi})_N$ 互不相交即可. 对于任一 $n\in N$, 有

$$(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi})(n)=\widetilde{\rho}_i(n)\widetilde{\psi}(n)=\rho_i(n)\psi(1)=(\dim_F W)\rho_i(n);$$
$${}^g(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi})(n)=\widetilde{\rho}_i(g^{-1}ng)\widetilde{\psi}(g^{-1}ng)=(\dim_F W)\ {}^g\rho_i(n).$$

因 $g\notin G_i$, 故 $g\notin H_i$, 即 ${}^g\rho_i\neq\rho_i$, 故

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi},{}^g(\widetilde{\rho}_i\widetilde{\psi}))_N&=((\dim_F W)\rho_i,(\dim_F W)\ {}^g\rho_i)_N\\&=(\dim_F W)^2(\rho_i,{}^g\rho_i)_N\\&=0.\end{aligned}$$

这就证明了 $\theta_{i,\psi}$ 不可约.

为了证明 $\overline{\mathrm{Irr}_F}G=\{\theta_{i,\psi}\mid\psi\in\mathrm{Irr}_F H_i,\ 1\leq i\leq r\}$, 根据推论 I.6.3, 只要证

$$\sum_{i,\psi}(\dim_F\theta_{i,\psi})^2=|G|.$$

因为 $\{\rho_1,\cdots,\rho_r\}$ 是 $\overline{\mathrm{Irr}_F}N$ 的 H- 轨道的代表系, 且 $|H\rho_i|=[H:H_i]=[G:G_i]$, 故有

$$|N|=\sum_{i=1}^r[H:H_i].$$

从而

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,\psi}(\dim_F\theta_{i,\psi})^2 &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{\psi\in\overline{\mathrm{Irr}}_F H_i}[G:G_i]^2(\deg\psi)^2\\
&= \sum_{i=1}^{r}[H:H_i]^2\sum_{\psi\in\overline{\mathrm{Irr}}_F H_i}(\deg\psi)^2\\
&= \sum_{i=1}^{r}[H:H_i]^2\cdot|H_i|\\
&= \sum_{i=1}^{r}\frac{|H|^2}{|H_i|}\\
&= |H|\sum_{i=1}^{r}\frac{|H|}{|H_i|}\\
&= |H|\cdot|N|\\
&= |G|.
\end{aligned}
$$

□

习 题

1. 利用定理 6.2 计算二面体群 D_n 、对称群 S_4 与交错群 A_4 的复特征标表.

§7 Frobenius 群

本节讨论 Frobenius 关于有限群结构的一条定理. 除了特殊情形这一定理至今尚无纯群论证明, 因此它被认为是特征标理论在结构理论中应用的又一典范.

7.1 定义 有限群 G 称为 Frobenius 群, 如果存在 G 的非平凡的子群 H 满足 $H\cap {}^gH=\{1\}$, $\forall g\in G-H$. 称 H 为 G 的一个 Frobenius 补.

不难看出，若 H 是 Frobenius 群的 Frobenius 补，则 ${}^gH$ 也是 G 的 Frobenius 补，$\forall g \in G$.

若 G 含有 2 阶元 x 且 $C_G(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$, 则 G 为 Frobenius 群且 $\langle x\rangle$ 为 G 的 Frobenius 补. 例如，二面体群

$$D_{2m+1} = \langle a, b \mid a^{2m+1} = b^2 = (ab)^2\rangle, \quad m \geq 1,$$

是以 $\langle b\rangle$ 为 Frobenius 补的 Frobenius 群.

7.2 定理(Frobenius) 设 G 是以 H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群. 则存在 G 的唯一的正规子群 N 使得 $G = N \rtimes H$. 称 N 为 G 的一个 Frobenius 核.

证 令 $N = \left(G - \bigcup_{g \in G} {}^gH\right) \cup \{1\}$. 欲证 $G = N \rtimes H$.

第一步 $|N| = [G:H]$.

事实上，由 Frobenius 补的定义知 $N_G(H) = H$. 故恰有 $[G:H]$ 个互异的 H 的共轭子群，这些共轭子群两两之交均为 $\{1\}$. 故 $\bigcup_{g\in G} {}^gH$ 共含有 $[G:H](|H|-1)+1$ 个元素. 于是

$$|N| = |G| - [G:H](|H|-1) = [G:H].$$

第二步 若 θ 是 H 的复值类函数且 $\theta(1) = 0$, 则 $(\theta^G)_H = \theta$.

事实上，由定义知

$$\theta^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{a \in G} \dot\theta(a^{-1}ga), \quad \forall g \in G.$$

故 $\theta^G(1) = \frac{|G|}{|H|}\theta(1) = 0$. 对于任一 $h \in H, h \neq 1$. 若 $a \in G$ 且 $a^{-1}ha \in H$, 则 $h \in H \cap {}^aH$. 由 Frobenius 补的定义推出 $a \in H$. 于

是

$$\begin{aligned}\theta^{G}(h) &= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\theta}(a^{-1}ha)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G, a^{-1}ha\in H}\theta(a^{-1}ha)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in H}\theta(a^{-1}ha)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in H}\theta(h)\\ &= \theta(h).\end{aligned}$$

第三步 构造特征标之差，构造 N^*.

设 $\varphi \in \overline{\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}}H$, 令 $\theta = \varphi - \varphi(1)\mathbf{1}_H$. 则由第二步知 $(\theta^G)_H = \theta$. 令

$$\varphi^* := \theta^G + \varphi(1)\mathbf{1}_G.$$

则 $\varphi^* \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(G)$, 即 G 的复特征标的整线性组合的集合，于是 φ^* 是不可约复特征标的整线性组合. 由 Frobenius 互反律知

$$\begin{aligned}(\varphi^*,\varphi^*)_G &= (\theta^G,\theta^G)_G + 2\varphi(1)(\theta^G,\mathbf{1}_G) + \varphi^2(1)\\ &= (\theta,\theta)_H + 2\varphi(1)(\theta,\mathbf{1}_H)_H + \varphi^2(1)\\ &= (\varphi,\varphi) - 2\varphi(1)(\varphi,\mathbf{1}_H)_H + \varphi^2(1) + 2\varphi(1)(\varphi,\mathbf{1}_H)\\ &\quad - 2\varphi^2(1)(\mathbf{1}_H,\mathbf{1}_H)_H + \varphi^2(1)\\ &= 1,\end{aligned}$$

从而 $\varphi^* = \pm\chi$, $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. 又因 $\varphi^*(1) = \varphi(1) > 0$, 故 $\varphi^* \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, 且 $(\varphi^*)_H = \varphi$.

令 $N^* := \bigcap_{\varphi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}H} \mathrm{Ker}\varphi^*$. 则 $N^* \lhd G$.

第四步　$N^* = N$.

设 $h \in N^* \cap H$. 则

$$\varphi(h) = \varphi^*(h) = \varphi^*(1) = \varphi(1), \quad \forall \varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} H,$$

即 $h \in \bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} H} \mathrm{Ker}\varphi = \{1\}$(引理 II.5.1). 从而 $N^* \cap H = \{1\}$. 又因 $N^* \lhd G$, 故 $N^* \cap {}^gH = \{1\}$. 从而 $N^* \subseteq N$.

反过来，设 $1 \neq x \in N$. 则 $x \notin \bigcup\limits_{g \in G} {}^gH$. 于是由诱导特征标的定义知 $\theta^G(x) = 0$, 从而 $\varphi^*(x) = \varphi(1) = \varphi^*(1)$, $\forall \varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} H$, 即 $x \in \bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} H} \mathrm{Ker}\varphi^* = N^*$. 这表明 $N \subseteq N^*$, 从而 $N = N^*$.

第五步　由 N 的构造知 $N \cap H = \{1\}, N = N^* \lhd G, G = NH$, 即 $G = N \rtimes H$.

若 $N' \lhd G$ 且 $G = N' \rtimes H$, 则 $N' \cap \left(\bigcup\limits_{g \in G} {}^gN\right) = \{1\}$. 故 $N' \subseteq N$. 而 $|N'| = [G : H] = |N|$. 故 $N' = N$. 这就完成了定理的证明. □

注　Frobenius 定理的证明中使用的方法可被进一步拓展且有许多应用，有兴趣的读者可参见 Isaacs 的书 [I] 中第 7 章.

Frobenius 定理可以用置换群的语言重新叙述. 为此，首先注意到如下观察:

7.3　引理　G 是 Frobenius 群当且仅当存在有限可迁 G- 集 X, 其中 $|X| > 1$, 使得相应的复置换表示的特征标 χ 满足

(i) $\chi(g) \leq 1$, $\forall 1 \neq g \in G$;

(ii) $G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \neq \{1\}$, $\forall x \in X$.

证　充分性: 因为 G 在 X 上的作用是可迁的, 故对于任意的 $x, y \in X$, 稳定子群 G_x 与 G_y 是共轭的. 任取 $x \in X$, 令 $H = G_x$.

因为 $|X|>1$, H 是 G 的非平凡子群. 因为

$$\chi(g)=|\{y\in X\mid gy=y\}|,\quad \forall g\in G,$$

故条件 (i) 表明 G 中任一非单位元 g 至多固定 X 中一个元. 由此直接可以验证 G 是以 H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群. 事实上, 设 $1\neq h\in H\cap {}^gH$. 故 $g^{-1}hg\in H$, 从而

$$hx=x,\quad (g^{-1}hg)x=x,$$

即 h 既固定 x 又固定 gx, 从而必有 $x=gx$, 即 $g\in H$.

必要性: 设 G 是以 H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群. 令 X 是 G 关于 H 的左陪集的集合. 则 $|X|>1$ 且 G 可迁地作用在 X 上. 对于任一 $x=gH\in X$, 有

$$\begin{aligned}G_x&=\{h\in G\mid hx=x\}\\&=\{h\in G\mid g^{-1}hg\in H\}\\&={}^gH\neq\{1\}.\end{aligned}$$

若 g 既固定 X 中元 g_1H 又固定 g_2H, 则 $g\in {}^{g_1}H\cap {}^{g_2}H$, 由 H 是 Frobenius 补知 $g=1$. 这就证明了 (i). □

由引理 7.3 立即得到定理 7.2 的置换群描述.

7.4 推论 设 X 是有限可迁 G- 集且 $|X|>1$, 相应的特征标 χ 满足

$$\chi(g)\leq 1,\quad \forall 1\neq g\in G.$$

则 $N=\{g\in G\mid \chi(g)=0\}\cup\{1\}$ 是 G 的正规子群且 N 是 X 的可迁置换群.

证 首先注意到 N 恰是 G 中所有没有固定点的元素的集合与单位元的并集. 因此, 若 $G_x=\{1\}$, $\forall x\in X$, 则 $N=G$. 若存

在 $G_x \neq \{1\}$, 则 $G_y \neq \{1\}, \forall y \in X$. 则由定理 7.2 的证明知 G 是以 G_x 为 Frobenius 补的 Frobenius 群，相应的 Frobenius 核为

$$\begin{aligned} N' &= \left(G - \bigcup_{g \in G} {}^g G_x\right) \cup \{1\} \\ &= \left(G - \bigcup_{g \in G} G_{g.x}\right) \cup \{1\}. \end{aligned}$$

因 G 在 X 上的作用可迁，故有 (注意，G_{gx} 与 G_x 共轭，从而 $G_{gx} \neq \{1\}$)

$$\begin{aligned} N' &= \left(G - \bigcup_{y \in X} G_y\right) \cup \{1\} \\ &= \{g \in G \mid \chi(g) = 0\} \cup \{1\} \\ &= N. \end{aligned}$$

从而 $N = N' \lhd G$. 又 $G = NG_x$, 故 N 在 X 上的作用也是可迁的. □

最后，我们讨论 Frobenius 群的特征标.

7.5　命题　设 G 是以 H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群，N 是相应的 Frobenius 核. 设 $\mathrm{char}F = 0$ 且 F 是 G 与 N 的分裂域. 则

(i) $C_G(n) \subseteq N$, $\forall 1 \neq n \in N$.

(ii) 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$ 且 $\mathrm{Ker}\chi \not\supseteq N$. 则存在 $\psi \in \mathrm{Irr}_F N$, $\psi \neq \mathbf{1}_N$ 使得 $\chi = \psi^G$. 反之，若 $\psi \in \mathrm{Irr}_F N$, $\psi \neq \mathbf{1}_N$, 则 $\psi^G \in \mathrm{Irr}_F G$.

证　(i) 设 $1 \neq n \in N$. 若 $C_G(n) \not\subseteq N$, 则由定理 7.2 的证明知存在 $g \in G$ 使得

$$C_G(n) \cap {}^g H \neq \{1\}.$$

取 $1 \neq x \in C_G(n) \cap {}^gH$, 则 $x \in {}^gH \cap {}^{ng}H = \{1\}$. 矛盾.

(ii) 由 (i) 和定理 4.5 即得. □

注 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$. 若 $\mathrm{Ker}\chi \supseteq N$, 则 $\chi \in \mathrm{Irr}_F H$. 从而 Frobenius 群 G 的 F- 特征标完全由其 Frobenius 补 H 和其 Frobenius 核 N 的 F- 特征标确定.

习 题

1. 设 F 是有限域, G 是所有如下形式的映射 $\theta: F \to F$ 的集合:

$$\theta(x) = ax + b, \quad \forall x \in F.$$

其中 $a, b \in F, a \neq 0$. 证明 G 对于映射的合成作成一个 Frobenius 群. 求 G 的 Frobenius 补与核, 并求 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$. [提示: 利用命题 7.5.]

2. 设 G 为 Frobenius 群. 证明 G 的 Frobenius 核是唯一的 (即不依赖于 Frobenius 补的选择), 且任一 Frobenius 补均为 ${}^gH$, 其中 H 是 G 的一个 Frobenius 补.

3. 设 $G = N \rtimes H$. 证明下述命题等价:

(i) $C_G(n) \subseteq N, \ \forall 1 \neq n \in N$.

(ii) $C_H(n) = 1, \ \forall 1 \neq n \in N$.

(iii) $C_G(h) \subseteq H, \ \forall 1 \neq h \in H$.

(iv) $G - N \subseteq \bigcup\limits_{g \in G} {}^gH$.

(v) 若 $1 \neq h \in H$, 则 h 共轭于 Nh 中任一元.

(vi) G 是以 H 为补的 Frobenius 群.

§8 单项表示与 M 群

8.1 回顾 G 的 F- 表示 ρ 称为单项表示, 如果 $\rho = \varphi^G$, 其中 φ 是

G 的某一子群 H 的 1 次 F- 表示. 若 (V, ρ) 是 G 的单项表示, 则由 §1 知存在 V 的一组基 B 使得 $\rho_B(g)$ 均为单项矩阵, $\forall g \in G$, 即 $\rho_B(g)$ 的每一行有且仅有一个元非零, 每一列有且仅有一个元非零.

G 称为关于域 F 的 M 群, 如果 G 的任一不可约 F- 表示均为单项表示. 若 G 是关于复数域 $\mathbf{C}$ 的 M 群, 则简称 G 为 M 群 (monomial group).

8.2 有限群 G 称为超可解群, 如果存在 G 的终止于 $\{1\}$ 的正规群列 (注意, 并非次正规群列)$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_m = \{1\}$, $G_i \lhd G$, $0 \le i \le m$, 使得每个因子群均为循环群.

由定义即知超可解群是可解群, 反之未必. 例如, S_4 是可解群但并非超可解群. 有限 Abel 群是超可解群. 本节要证明的一个基本事实是超可解群是 M 群.

首先讨论一下超可解群的基本性质.

性质 1 超可解群的子群与商群均是超可解群.

证 设 G 是超可解群, $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_m = \{1\}$ 是 G 的正规群列使得 G_i/G_{i+1} 是循环群, $0 \le i \le m-1$.

设 $H \le G$. 令 $H_i = H \cap G_i$. 则 $H = H_0 \rhd H_1 \rhd \cdots \rhd H_m = \{1\}$ 是 H 的正规群列. 令 $f_i : H_i \longrightarrow G_i/G_{i+1}$, 其中 $f_i(h) = hG_{i+1}$, $\forall h \in H_i$. 则 f 是群同态且 $\mathrm{Ker} f = H_{i+1}$. 故 H_i/H_{i+1} 是 G_i/G_{i+1} 的子群. 从而 H_i/H_{i+1} 也是循环群. 这就证明了 H 的超可解性.

类似地可证 G 的商群也是超可解群. □

注 设 $N \lhd G$, 且 G/N 与 N 均为超可解群. 则 G 未必是超可解群. 例如, Klein 四元群与 3 阶循环群均是超可解群, 但 A_4 不是超可解群.

性质 2 幂零群是超可解群.

证 G 为幂零群当且仅当存在 G 的正规群列

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

使得 $G_{i+1}/G_i = Z(G/G_i)$, $0 \le i \le n-1$. 因 G_{i+1}/G_i 是 Abel 群, 故它是循环群的直积. 因而有 G_{i+1}/G_i 的正规群列

$$(1) = G_i/G_i \lhd G_i^{(1)}/G_i \lhd \cdots \lhd G_i^{(m_i)}/G_i = G_{i+1}/G_i$$

使得每个因子群均为循环群. 从而得到

$$G_i \lhd G_i^{(1)} \lhd \cdots \lhd G_i^{(m_i)} = G_{i+1}$$

使得每个因子群均为循环群. 由于 $G_i^{(t)}/G_i \lhd G_{i+1}/G_i = Z(G/G_i)$. 故 $G_i^{(t)}/G_i \lhd G/G_i$, 从而 $G_i^{(t)} \lhd G$, $0 \le t \le m_i$. 由此即得到 G 的终止于 (1) 的正规群列使得每个因子群均为循环群, 即 G 是超可解群. □

注 反之未必成立. 例如 S_3 是超可解群, 但并非幂零群.

性质 3 p- 群是幂零群.

证 设 $|G| = p^r, r > 0$. 则 G 有非平凡的中心 G_1. 若 $G_1 \neq G$, 则 G/G_1 也是 p- 群, 故它亦有非平凡的中心 G_2/G_1, 从而得到 G 的正规群列

$$(1) \lhd G_1 \lhd G_2.$$

重复这一过程. 因 $|G| < +\infty$, 这一过程在有限步终止, 即 G 是幂零群. □

8.3 引理 设 G 是非 Abel 的超可解群. 则存在 G 的 Abel 正规子群 N, $N \not\subseteq Z(G)$.

证 由性质 1 知 $G/Z(G)$ 是超可解群. 于是由定义得到 $G/Z(G)$ 的循环正规子群 $N/Z(G) \neq (1)$. 从而 $N \not\subseteq Z(G)$ 且 N 是 G 的 Abel 正规子群. □

8.4　定理　设 G 是超可解群，F 是 G 的所有子群的分裂域. 则 G 是关于 F 的 M 群.

证　设 (V,ρ) 是 G 的不可约 F- 表示. 不妨设 G 是非 Abel 群. 对 $|G|$ 用归纳法. 由引理 I.3.4 可知 F 也是 G 的任一商群的所有子群的分裂域. 由性质 1, 不妨设 ρ 是忠实的, 即 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$. 由引理 8.3 知存在 G 的 Abel 正规子群 N, $N \nsubseteq Z(G)$. 因此由 Blichfeldt 定理 (参见习题 5.2) 知 $\rho = v^G$, 其中 v 是 G_μ 的不可约 F- 表示, μ 是 ρ_N 的一个不可约分支. (事实上, 由 Clifford 定理, 只要证明 $G_\mu \neq G$. 若 $G_\mu = G$, 则 $\rho_N = m\mu$, 从而 $\rho(n) = \mu(n)1_V$, $\forall n \in N$. 因 N 为 Abel 群, μ 是 1 次的, 从而 $\rho(N) \subseteq Z(\rho(G))$. 因为 ρ 忠实, 故推出 $N \subseteq Z(G)$. 矛盾 !)

又由性质 1 知 $H = G_\mu$ 也是超可解群, 故由归纳法知 $v = \lambda^H$, 其中 λ 是 H 的 1 次 F- 表示, 从而 $\rho \doteq v^G = (\lambda^H)^G = \lambda^G$ 是单项表示. □

注　(i) 关于定理 8.4 的一个推广参阅 [I], p.87; 或 [Q], p.216.

(ii) 逆命题不成立. 例如, A_4 不是超可解群, 但 A_4 是 M 群. 事实上, A_4 唯一的非 1 次不可约表示 ρ 是 $K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 的 1 次表示 φ 的诱导表示, 其中 $\varphi((12)(34)) = \varphi((13)(24)) = -1$. 为此, 设 ρ 的特征标为 χ. 则 $\chi((1)) = 3, \chi((123)) = 0 = \chi((132))$, $\chi((12)(34)) = -1$, 这与 φ^G 的取值相同.

8.5　命题　关于 F 的 M 群 G 的任一商群仍是关于 F 的 M 群.

证　设 $N \lhd G$. (V,ρ) 是 G/N 的不可约 F- 表示. 则 ρ 自然地视为 G 的不可约 F- 表示. 从而 ρ 是单项表示, 即 $\rho = \varphi^G$, φ 是 G 的子群 H 的 1 次表示.

设 $n \in N$. 则 $1_V = \rho(n) = \varphi^G(n)$. 另一方面, 设 $\{g_1 = 1, \cdots, g_r\}$ 是 G 关于 H 的左陪集的一个代表系. 由 $\varphi^G(n)$ 矩阵 (参

见 1.2 中矩阵 (2)) 可知 $g_i^{-1}ng_i \in H$ 且 $\varphi(g_i^{-1}ng_i) = 1$. 特别地, 因 $g_1 = 1$, 故 $n \in H$ 且 $\varphi(n) = 1$. 这表明 $N \subseteq H$ 且 $N \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$. 从而 $H/N \subseteq G/N$ 且 φ 可视为 H/N 的 1 次 F- 表示, 从而作为 G/N 的不可约表示 ρ 是单项表示, 即 $\rho = \varphi^{G/N}$. 这就证明 G/N 也是关于 F 的 M 群. □

8.6 定理 (Taketa) M 群是可解群.

证 设 G 是 M 群. 欲证 G 的导出列

$$G \rhd G' \rhd \cdots \rhd G^{(i)} \rhd \cdots$$

必终止于 $\{1\}$. 否则, 存在 $m \geq 1$ 使得 $G^{(m)} = G^{(m+1)} \neq \{1\}$.

因 $\bigcap\limits_{\rho \in \overline{\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G}} \mathrm{Ker}\rho = (1)$, 故存在 $\rho \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$ 使 $G^{(m)} \nsubseteq \mathrm{Ker}\rho$. 设 ρ 是满足此条件的次数最小的表示. 因 $G^{(m)} \subseteq G'$ 且 G' 含于任一 1 次表示的核, 故 $\deg\rho > 1$. 因 G 是 M 群, 故有子群 H 的 1 次复表示 φ 使 $\rho = \varphi^G$. 因 $[G:H] = \deg\rho > 1$, 故 $H \neq G$.

由 Frobenius 互反律知 $\mathbf{1}_G$ 是 $(\mathbf{1}_H)^G$ 的不可约分支, 而 $\deg(\mathbf{1}_H)^G = [G:H] > 1$, 故 $(\mathbf{1}_H)^G$ 可约. 设 ρ' 是 $(\mathbf{1}_H)^G$ 的任一不可约分支. 则 $\deg\rho' < [G:H] = \deg\rho$. 故由 ρ 的选取知 $G^{(m)} \subseteq \mathrm{Ker}\rho'$. 从而推出 $G^{(m)} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{1}_H)^G$. 于是 $\forall g \in G^{(m)}$, $(\mathbf{1}_H)^G(g)$ 是单位阵, 从而 $\dot{\mathbf{1}}_H(g) = 1$, 这就推出 $g \in H$, 即有 $G^{(m)} \subseteq H$. 从而 $G^{(m)} = G^{(m-1)} \subseteq H'$. 因 φ 是 H 的 1 次表示, 故 $\mathrm{Ker}\varphi \supseteq H' \supseteq G^{(m)}$.

对于任一 $g \in G^{(m)}$, 因为 $G^{(m)} \lhd G$ 且 $G^{(m)} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$, 根据 1.2 中矩阵 (2) 知矩阵 $\varphi^G(g)$ 的主对角线上元为 1. 又 $\varphi^G(g)$ 是单项矩阵, 故 $\varphi^G(g)$ 是单位阵. 故 $g \in \mathrm{Ker}\varphi^G$, 即 $G^{(m)} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^G = \mathrm{Ker}\rho$. 矛盾! □

注 可解群而非 M 群的例子参见习题 1.

综上所述，我们得到了如下真包含关系：

$$\{p\text{-群}\} \subsetneq \{\text{幂零群}\} \subsetneq \{\text{超可解群}\} \subsetneq \{M\text{ 群}\} \subsetneq \{\text{可解群}\}.$$

习　题

1. 设 $G = SL_2(F_3)$ 是 3 阶域上的 2 阶特殊线性群，即 3 阶域上行列式为 1 的 2 阶阵的乘法群. 则

(i) $|G| = 24$, 从而由 Burnside 定理知 G 是可解群.

(ii) G 的复特征标表为

	1	1	6	4	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
χ_4	3	3	-1	0	0	0	0
χ_5	2	-2	0	-1	-1	1	1
χ_6	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω	ω^2
χ_7	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2	ω

(iii) G 不是 M 群. [提示：证明 G 无 12 阶子群.]

(iv) 设 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{R}$ 上四元数代数， $E = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 是乘法群 $\mathbf{H}^*$ 的子群. 则 G 同构于 E 与 16 个元 $(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2$ 之并作成的 $\mathbf{H}^*$ 的子群，它是正规子群 E 与一个 3 阶循环群的半直积.

(v) G 是特征 2 域上椭圆曲线 $y^2 - y = x^3$ 的自同构群.

第5章 Artin定理与Brauer定理及其应用

本章证明有限群表示的几条重要的定理. 首先是关于有理特征标的 Artin 定理和 Brauer 诱导定理, 以及 Green 关于 Brauer 定理的一个逆; 其次利用 Brauer 诱导定理证明 Brauer 的分裂域定理, 从而导出含 m 次本原单位根的域是 G 的分裂域, 其中 m 是有限群 G 的指数; 最后给出当 $\mathrm{char}F \nmid |G|$ 时 G 的不可约 F-表示的个数的描述, 这是定理 II.3.2 的一般形式.

本章中, G 总是有限群.

§1 有理特征标的 Artin 定理

群 G 的 $\mathbf{Q}$- 表示称为有理表示, 相应的特征标称为有理特征标. 对于任一子群 H, 单位 $\mathbf{Q}$- 特征标的诱导特征标 $\mathbf{1}_H^G$ 显然是有理特征标.

Artin 关于有理特征标的定理是说 G 的每一个有理特征标 χ 均可表达成如下形式:

$$\chi = \sum_C a_C \mathbf{1}_C^G,$$

其中 C 跑遍 G 的所有循环子群, $a_C \in \mathbf{Q}$. Brauer 则明确地给出了系数 a_C 的表达式. 为了叙述 Brauer 关于系数的公式并证明 Artin 定理, 首先我们需要如下引理:

1.1　引理　设 χ 是 G 的有理特征标. 若 G 的两个循环子群 $\langle x\rangle$ 与 $\langle y\rangle$ 在 G 中共轭, 则 $\chi(x)=\chi(y)$.

证　因 χ 是 G 上的类函数, 故不妨设 $\langle x\rangle=\langle y\rangle$. 设 x 的阶为 n. 则存在与 n 互素的正整数 m 使 $y=x^m$. 令 ω 是 n 次本原单位根, 则 ω^m 也是 n 次本原单位根. 回顾 $\mathbf{Q}$ 上分圆多项式 $\Phi_n(t)$ 是以全部 n 次本原单位根为根的首一多项式, 它是 $\mathbf{Z}[t]$ 中的不可约多项式 (参见 [V1], p.211). 因此存在分圆域 $\mathbf{Q}(\omega)$ 的 $\mathbf{Q}$- 自同构 σ 使 $\sigma(\omega)=\omega^m$.

设 ρ 是 χ 相应的 $\mathbf{Q}$- 表示. 因 $\chi(x)=\sum\limits_{1\le i\le\chi(1)}\omega_i$, 其中 $\{\omega_i\}$ 是 $\rho(x)$ 的全部特征根且 ω_i 均为 n 次单位根, 而 $\{\omega_i^m\}$ 是 $\rho(x^m)$ 的全部特征根, 故由 $\chi(x)\in\mathbf{Q}$ 推出

$$\begin{aligned}\chi(x)=\sigma(\chi(x))&=\sum_{1\le i\le\chi(1)}\chi(\omega_i)\\&=\sum_{1\le i\le\chi(1)}\omega_i^m=\chi(x^m)\\&=\chi(y).\end{aligned}$$

□

1.2　Möbius 函数 $\mu:\ \mathbf{N}\to\{0,1,-1\}$ 定义如下:

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & 若\ n=1,\\ 0, & 若\ n\ 被素数的平方整除,\\ (-1)^r, & 若\ n\ 是\ r\ 个互异的素数之积.\end{cases}\tag{1}$$

则 μ 是积性函数, 即

$$\mu(nm)=\mu(n)\mu(m),\quad 其中\ (n,m)=1;$$

并且有 Möbius 反演律

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}\tag{2}$$

参见 [H], p.118.

1.3 定理(E. Artin) 有限群 G 的每一有理特征标 χ 均可表达成

$$\chi = \sum_{C} a_C \mathbf{1}_C^G, \tag{3}$$

其中 C 跑遍 G 的所有循环子群, a_C 由下式给出:

$$a_C = \frac{1}{[G:C]} \sum_{C^* \supseteq C} \mu([C^*:C])\chi(z^*), \tag{4}$$

其中 C^* 跑遍 G 的包含 C 的所有循环子群, z^* 是 C^* 的一个生成元.

证(Brauer) 首先, 由引理 1.1 知, 值 $\chi(z^*)$ 不依赖于 C^* 的生成元 z^* 的选取. 令

$$\chi^* = \sum_{C} a_C \mathbf{1}_C^G.$$

我们要证 $\chi^*(g) = \chi(g)$, $\forall g \in G$.

首先计算

$$\mathbf{1}_C^G(g) = \frac{1}{|C|} \sum_{x \in G, x^{-1}gx \in C} \mathbf{1}_C(x^{-1}gx),$$

这归结为 $|\{x \in G \mid x^{-1}gx \in C\}|$. 若 $x^{-1}gx \notin C$, $\forall x \in G$, 则 $\mathbf{1}_C^G(g) = 0$.

设存在 $a \in G$ 使 $a^{-1}ga = h \in C$. 则对任一 $x^{-1}gx \in C$, $\langle x^{-1}gx \rangle$ 与 $\langle h \rangle$ 是循环群 C 中两个同阶的子群, 故 $\langle x^{-1}gx \rangle = \langle h \rangle$, 即

$$x^{-1}a\langle h \rangle a^{-1}x = \langle x^{-1}gx \rangle = \langle h \rangle.$$

从而 $x^{-1}a \in N_G(\langle h \rangle)$. 反之, 若 $x^{-1}a \in N_G(\langle h \rangle)$, 则 $x^{-1}gx \in C$. 因此

$$|\{x \in G \mid x^{-1}gx \in C\}| = |N_G(\langle h \rangle)| = |N_G(\langle g \rangle)|.$$

综上所述，我们得到

$$\mathbf{1}_C^G(g) = \begin{cases} 0, & \text{若 } C \text{ 不含有 } g \text{ 的共轭元,} \\ \dfrac{|N_G(\langle g\rangle)|}{|C|}, & \text{若 } C \text{ 含有 } g \text{ 的共轭元.} \end{cases}$$

由此得到

$$\chi^*(g) = \sum_C a_C \mathbf{1}_C^G(g) = |N_G(\langle h\rangle)| {\sum_C}' \frac{a_C}{|C|},$$

其中在和式 $\sum'$ 中 C 取遍 G 的含有 g 的共轭元的循环子群，即 C 取遍 G 的循环子群且 C 含有子群与 $\langle g\rangle$ 共轭.

注意到 G 中恰有 $r = \dfrac{|G|}{|N_G(\langle g\rangle)|}$ 个共轭于 $\langle g\rangle$ 的循环群，而每一循环群 C 至多只含有一个子群与 $\langle g\rangle$ 共轭. 因此，若与 $\langle g\rangle$ 共轭的循环群全体为 $\langle x_1^{-1}gx_1\rangle = \langle g\rangle, \cdots, \langle x_r^{-1}gx_r\rangle$, 则有无交并

$$\begin{aligned} &\{G \text{ 的循环子群 } C \mid C \text{ 含有子群与 } \langle g\rangle \text{ 共轭 }\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \{G \text{ 的循环子群 } C \mid C \supseteq \langle x_i^{-1}gx_i\rangle\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \{G \text{ 的循环子群 } C \mid g \in x_iCx_i^{-1}\}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \chi^*(g) &= |N_G(\langle g\rangle)| {\sum_C}' \frac{a_C}{|C|} \\ &= |N_G(\langle g\rangle)| \sum_{i=1}^{r} \sum_{C, g\in x_iCx_i^{-1}} \frac{a_C}{|C|}. \end{aligned}$$

注意到由 a_C 的表达式可看出对于任一 x_i 有 $\dfrac{a_C}{|C|} = \dfrac{a_{x_iCx_i^{-1}}}{|x_iCx_i^{-1}|}$, 因

此上式可写成

$$\begin{aligned}\chi^*(g) &= |N_G(\langle g\rangle)|\sum_{i=1}^{r}\sum_{C\ni g}\frac{a_C}{|C|} \\ &= r|N_G(\langle g\rangle)|\sum_{C\ni g}\frac{a_C}{|C|} \\ &= |G|\sum_{C\ni g}\frac{a_C}{|C|} \\ &= \sum_{C\ni g}\sum_{C^*\supseteq C}\mu([C^*:C])\chi(z^*) \\ &= \sum_{C^*\ni g}\chi(z^*)\sum_{g\in C\subseteq C^*}\mu([C^*:C]),\end{aligned}$$

其中外边的和式 $\sum$ 中 C^* 取遍包含 g 的循环子群，而里边的和式 $\sum$ 中 C 取遍满足 $\langle g\rangle\subseteq C\subseteq C^*$ 的循环子群.

从而，对于每一阶为 m 的固定循环子群 C^*，里边的和式可改写成

$$\sum_{d|\frac{m}{t}}\mu(d),$$

其中 $t=|\langle g\rangle|$. 由 (2) 式知这个和只有当 $\frac{m}{t}=1$ 时才不为零，而 $\frac{m}{t}=1$ 意味着 $C^*=\langle g\rangle$. 因此

$$\chi^*(g)=\mu(1)\chi(z^*)=\chi(g). \qquad \square$$

1.4 在群 G 上引入等价关系 $\sim$: $\forall x,y\in G$, $x\sim y:\Leftrightarrow$ $\langle x\rangle$ 与 $\langle y\rangle$ 在 G 中共轭. 令 $[x]:=\{y\in G\mid y\sim x\}$. 则 $\sim$ 引起 G 的一个划分，即有无交并

$$G=\bigcup_{i=1}^{m}[x_i].$$

令 $C_i:=\langle x_i\rangle$, $n_i=|C_i|$. 则

$$|[x_i]|=[G:N_G(C_i)]\varphi(n_i),$$

其中 φ 是 Euler 函数, 即 $\varphi(n_i)$ 是 1 到 n_i 之间与 n_i 互素的整数的个数.

由引理 1.1 知有理特征标 χ 在 $[x_i]$ 上是常值函数. 注意到若 C 与 C' 是共轭的循环子群, 则由 (4) 式知 $a_C = a_{C'}$; G 的任一循环子群 C 必与某一 C_i 共轭, 而 C_i 有 $[G: N_G(C_i)]$ 个共轭子群. 由此可将 Artin 定理改写成

$$\chi = \sum_{1\le i<m} [G:\ N_G(C_i)]a_{C_i}\mathbf{1}_{C_i}^G, \tag{5}$$

其中 a_{C_i} 由 (4) 式给出.

1.5　现在我们可以导出 G 的不可约有理表示的个数, 这也是 G 的不可约有理特征标的个数.

延用 1.4 中的记号, 我们有 m 个关于等价关系 $\sim$ 的等价类 $[x_i]$, $1\le i\le m$. 令 V 是 G 上的 $\mathbf{Q}$- 值函数 f 的全体, 其中 f 是 $\sim$ 的等价类的类函数, 即 f 在 $[x_i]$ 上是常值函数, $1\le i\le m$. 则 V 作成 m 维 $\mathbf{Q}$- 向量空间. 显然 $f_1,\cdots,f_m$ 是 V 的一组基, 其中

$$f_i([x_j]) = \delta_{ij},\quad 1\le i,j\le m. \tag{6}$$

由引理 1.1 知任一有理特征标 χ 均是 $\sim$ 的等价类的类函数, 因此 G 的全部不可约有理特征标 $\chi_1,\cdots,\chi_t$ 均是 $f_1,\cdots,f_m$ 的线性组合; 而由特征标的正交关系知 $\chi_1,\cdots,\chi_t$ 是 $\mathbf{Q}$- 线性无关的, 故 $t\le m$.

定理　有限群 G 的不可约有理表示的个数等于 G 的互不共轭的循环子群的个数.

证　延用上面的记号, 只要证 $m\le t$. 对于 G 的任一循环子群 C, 引入 G 上关于 $\sim$ 的等价类的类函数 t_C:

$$t_C = \sum_{C'\subseteq C}\frac{1}{[C:C']}\mu([C:C'])1_{C'}^C, \tag{7}$$

其中 C' 取遍 C 的所有循环子群. 则有

$$t_C(g) = \begin{cases} 1, & 若\ C = \langle g \rangle, \\ 0, & 若\ C \neq \langle g \rangle, \end{cases} \quad \forall g \in C. \tag{8}$$

(留作习题.)

直接验证可知

$$f_i = \frac{|C_i|}{|N_G(C_i)|} t_{C_i}^G, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{9}$$

其中 f_i 是由 (6) 式定义的, $t_{C_i}^G$ 是诱导类函数. 注意到 $t_{C_i}^G$ 是 $\mathbf{1}_{C'}^G$ 的 $\mathbf{Q}$- 线性组合, 从而 f_i 是有理特征标的 $\mathbf{Q}$- 线性组合, 进而是 $\chi_1, \cdots, \chi_t$ 的 $\mathbf{Q}$- 线性组合. 这就证明了 $m \leq t$. □

习 题

1. 给出定理 1.5 证明的细节.

2. 设 A 是循环群. 定义 A 上的 $\mathbf{Z}$- 值类函数

$$\theta_A(a) = \begin{cases} |A|, & 若\ a\ 生成\ A, \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

证明对于任一有限群 G 有

$$|G| = \sum_{A \subseteq G} (\theta_A)^G,$$

其中 A 取遍 G 的所有循环子群, $|G|$ 理解为常值类函数.

3. 设 A 是循环群. 证明 θ_A 是不可约复特征标的整线性组合. [提示: 对 $|A|$ 用归纳法, 并利用习题 2. 注意到常值函数是单位特征标的倍乘.]

4. 令 $\mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(G)$ 是 G 的不可约复特征标的 $\mathbf{Z}$- 线性组合.

(i) 证明 $\mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(G)$ 具有环结构.

(ii) 设 $H \leq G$. 则诱导映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}:\ \mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(H) &\longrightarrow \mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(G),\\ \lambda &\longmapsto \lambda^G\end{aligned}$$

是加群同态且 $\mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(H)$ 在 Ind 下的像是 $\mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(G)$ 的理想. [提示: 利用推论 IV.1.9(iii).]

5. 设 $\chi \in \mathrm{ch}^+_{\mathbf{C}}(G)$. 证明

$$|G|\chi = \sum_{\lambda} a_\lambda \lambda^G,$$

其中 λ 跑遍 G 的循环子群的 1 次特征标的集合, $a_\lambda \in \mathbf{Z}$. [提示: 利用习题 2 、习题 3 和习题 4.]

§2 Brauer 诱导定理

本节总设 $\mathrm{char}F = 0$, F 是 G 的所有子群的分裂域.

Brauer 诱导定理是说有限群 G 的任一 F- 特征标是某些称为初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整线性组合. 而所谓的初等子群则有相对简单的结构. 这是一条十分深刻且有重要应用的定理, 它在特征标理论中占有中心地位. 自 1947 年 Brauer 发表原始证明以后, Roquette、Brauer 和 Tate 又分别给出了新的证明, 这里采用的是 Goldschmidt 和 Isaacs 的证明.

2.1 G 称为初等群, 若存在 G 的正规循环子群 C 和正规 p- 子群 P, 其中 C 的阶与 p 互素, 使得 $G = C \times P$.

G 称为拟初等群, 若存在 G 的正规循环子群 C 和 p- 子群 P, 其中 C 的阶与 p 互素, 使得 $G = C \rtimes P$.

不难证明初等群的子群是初等群，拟初等群的子群也是拟初等群 (习题).

2.2 Brauer 诱导定理 有限群 G 的任一 F- 特征标是 G 的某些初等子群的 1 次 F- 特征标的诱导特征标的整线性组合.

令 $\mathcal{E}$ 是 G 的初等子群的集合，$\mathrm{ch}_F(G)$ 是 G 的广义 F- 特征标的集合，即 G 的 F- 特征标的整线性组合. 则 $\mathrm{ch}_F(G)$ 具有环的结构. 令 $\mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(G)$ 是 $\{\psi^G \mid \psi \in \mathrm{ch}_F(H), H \in \mathcal{E}\}$ 中元的整线性组合. 则 Brauer 诱导定理等价于下述定理:

2.3 定理 $\mathrm{ch}_F(G) = \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(G)$.

事实上，由 Brauer 诱导定理显然可推出定理 2.3.

反之，设 $\mathrm{ch}_F(G) = \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(G)$. 不难看出初等群是幂零群，而由 III.8 知幂零群是关于 F 的 M 群. 因此 G 的任一初等子群 H 的特征标 $\lambda = \mu^H$, 其中 μ 是 H 的子群 H_0 的 1 次特征标. 另一方面，G 的初等子群也是 G 的初等子群，因此 $\lambda^G = (\mu^H)^G = \mu^G$, 其中 μ 是 G 的初等子群 H_0 的 1 次特征标. 从而由 $\mathrm{ch}_F(G) = \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(G)$ 即可推出 Brauer 诱导定理.

为了证明定理 2.3, 首先证明如下定理:

2.4 定理 (L. Solomon) 存在有限个整数 c_i 和 G 的拟初等子群 H_i 使得

$$\mathbf{1}_G = \sum c_i \mathbf{1}_{H_i}^G.$$

为了证明定理 2.4, 我们需要两个引理.

2.5 令 $\mathcal{H}$ 是 G 的拟初等子群的集合，$P(\mathcal{H})$ 是由 $\{\mathbf{1}_H^G \mid H \in \mathcal{H}\}$ 的整线性组合作成的加群.

引理 $P(\mathcal{H})$ 是 G 上的整值函数环 (此处，环不必含单位元).

证　显然 $P(\mathcal{H})$ 中任一元均是 G 上的整值函数. 只要证明 $\mathbf{1}_L^G \cdot \mathbf{1}_H^G \in P(\mathcal{H})$, $\forall H, L \in \mathcal{H}$. 设 $\{g_1, \cdots, g_r\}$ 是 G 的 (L, H) 双陪集的一个代表系. 令 $L_i = {}^{g_i}H \cap L$. 由推论 IV.3.3 知

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_H^G)_L &= \sum_{1\le i\le r} (({}^{g_i}\mathbf{1})_{L_i})^L \\ &= \sum_{1\le i\le r} \mathbf{1}_{L_i}^L.\end{aligned}$$

故由推论 IV.1.9(iii) 知

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_L^G \cdot \mathbf{1}_H^G &= ((\mathbf{1}_L \cdot \mathbf{1}_H^G)_L)^G \\ &= ((\mathbf{1}_H^G)_L)^G \\ &= \sum_{1\le i\le r} (\mathbf{1}_{L_i}^L)^G \\ &= \sum_{1\le i\le r} \mathbf{1}_{L_i}^G \in P(\mathcal{H}),\end{aligned}$$

这里用到拟初等群的子群仍是拟初等群这一事实. □

2.6　引理(B. Banaschewski)　设 A 是非空有限集 X 上的整值函数环 (此处, 不要求 A 含有单位元). 令 1_X 是在 X 上值恒等于 1 的函数. 若 $1_X \notin A$, 则存在 $x \in X$ 和素数 p 使得 $p|f(x)$, $\forall f \in A$.

证　对任一 $x \in X$. 令 $I_x = \{f(x) \mid f \in A\}$. 则 I_x 是 $\mathbf{Z}$ 的子环 (此处, 环亦不必含单位元). 若存在 $x \in X$ 使 $I_x \neq \mathbf{Z}$, 则存在素数 p 使 $I_x \subseteq (p)$, 从而 $p|f(x)$, $\forall f \in A$, 从而引理得证. 因此只要证明: 若 $I_x = \mathbf{Z}$, $\forall x \in X$, 则 $1_X \in A$.

设 $I_x = \mathbf{Z}$, $\forall x \in X$. 则 $1 \in I_x$, $\forall x \in X$. 故有 $f_x \in A$ 使 $f_x(x) = 1$. 于是有恒等式

$$\prod_{x\in X} (1_X - f_x) = 0.$$

将上式左边的积展开，即可看出 1_X 是 f_x 的积的整线性组合，从而 $1_X \in A$. □

2.7 定理 2.4 的证明 根据引理 2.5 和引理 2.6, 只要证明对于任一 $g \in G$ 和任一素数 p, 均存在拟初等群 H 使得 $p \nmid \mathbf{1}_H^G(g)$.

设 g 的阶为 $p^l \cdot m$, $l \geq 0$, $(p, m) = 1$. 令 $C = \langle g^{p^l} \rangle$, $N = N_G(C)$, H/C 是 N/C 的 Sylow p- 子群. 则 H 是拟初等群: H 是正规子群 C 与 H 的 Sylow p- 子群的半直积.

注意到 $\mathbf{1}_H^G(g)$ 等于满足 $gxH = xH$ 的左陪集 xH 的个数. 若 $gxH = xH$, 则 $x^{-1}gx \in H$, 从而 $x^{-1}Cx \subseteq x^{-1}\langle g \rangle x \subseteq H$. 而 H 中只有一个阶为 $|C| = m$ 的循环子群, 故 $x^{-1}Cx = C$, 从而 $x \in N_G(C) = N$. 又因为 $g \in N$, 故

$$\mathbf{1}_H^G(g) = \mathbf{1}_H^N(g).$$

又注意到 C 平凡地作用在 N 关于 H 的左陪集集合 N/H 上, 因此诱导出 $\langle g \rangle / C$ 在 N/H 上的作用. 因 $\langle g \rangle / C$ 是 p- 群, 故这一作用的每一个非平凡轨道的长能被 p 整除. 于是 $\langle g \rangle$ 在 N/H 上的作用的非平凡轨道的长均能被 p 整除, 故 $|N/H| = [N : H] \equiv s (\mathrm{mod}\, p)$, 其中 s 恰是 $\langle g \rangle$ 在 N/H 上作用的平凡轨道的个数. 因为 $s = (\mathbf{1}_H)^G(g)$, 故

$$\mathbf{1}_H^G(g) = \mathbf{1}_H^N(g) \equiv [N : H] \ (\mathrm{mod}\, p),$$

而 $[N : H]$ 与 p 互素, 这就证明了 $p \nmid \mathbf{1}_H^G(g)$. □

为了证明定理 2.3, 首先证明如下引理:

2.8 引理 (Isaacs) 设 $G = N \rtimes P$, 其中 P 是 p- 群, $|N|$ 与 p 互素. 设 λ 是 N 的 1 次特征标使得 $G = G_\lambda$, 且 $C_N(P) \subseteq \mathrm{Ker}\lambda$, 其

中 $G_\lambda := \{g \in G \mid {}^g\lambda = \lambda\}$, $C_N(P) = \{n \in N \mid ny = yn,\ \forall y \in P\}$. 则 $\lambda = \mathbf{1}_N$.

证　令 $L = \mathrm{Ker}\lambda$. 对于 N 关于 L 的任一左陪集 nL 中任一元 nx 和 $y \in P$, 我们断言 $ynxy^{-1} \in nL$.

事实上, 由题设知 $P \subseteq G_\lambda$, 故有 ${}^y\lambda = \lambda$, 从而

$$\begin{aligned}\lambda(n^{-1}ynxy^{-1}) &= \lambda(n^{-1})\ {}^y\lambda(nx) = \lambda(n^{-1})\ \lambda(nx)\\ &= \lambda(n^{-1}nx) = \lambda(x)\\ &= 1.\end{aligned}$$

因此 P 在 nL 上有共轭作用. 因 P 是 p- 群, 故 nL 的非平凡 P- 轨道的长被 p 整除. 因 L 是 N 的子群, $|N|$ 与 p 互素, 故 $|nL| = |L|$ 与 p 互素. 于是 nL 必有平凡 P- 轨道, 即 nL 中含有元 nl 与 P 中任一元可换, 从而 $nl \in C_N(P)$, 故由题设知 $nl \in L$, 从而 $n \in L$. 这就证明了 $N = L$, 即 $\lambda = \mathbf{1}_N$. □

2.9　定理 2.3 的证明　由推论 IV.1.9(iii) 知 $\mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(G)$ 是 $\mathrm{ch}_F(G)$ 的理想, 故只要证 $\mathbf{1}_G \in \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(G)$.

根据定理 2.4, 不妨设 G 是拟初等群. 对 $|G|$ 用归纳法. 再由定理 2.4, 只要证明: 若 G 是拟初等群但不是初等群, 则 $\mathbf{1}_G$ 是 G 的真子群的特征标的诱导特征标的整线性组合.

设 $G = C \rtimes P$, P 为 p- 群, C 是阶与 p 互素的循环群. 令 Z 是 P 在 C 中的中心化子. 因 G 非初等, 故 $Z \neq C$. 令 $H = Z \times P$, 则 $H \neq G$. 故只要证明

$$\mathbf{1}_H^G = \mathbf{1}_G + \sum_i \xi_i, \tag{*}$$

其中 ξ_i 是 G 的真子群的特征标的诱导特征标. 注意, 由 Frobenius 互反律知 $\mathbf{1}_G$ 出现在 $\mathbf{1}_H^G$ 中的重数为 1.

因 $G = HC$, 由子群定理有

$$(\mathbf{1}_H^G)_C = (\mathbf{1}_{C\cap H})^C = \mathbf{1}_Z^C.$$

设 (*) 是 $\mathbf{1}_H^G$ 的不可约分解. 将其限制在 C 上得到

$$\mathbf{1}_Z^C = \mathbf{1}_C + \sum_i (\xi_i)_C. \tag{**}$$

因 $(\mathbf{1}_Z^C, \mathbf{1}_C) = 1$, 故 $\mathbf{1}_C$ 不再是 $(\xi_i)_C$ 的不可约分支. 令 λ 是 $(\xi_i)_C$ 的一个不可约分支, 则 $\lambda \neq \mathbf{1}_C$. 因为 C 是 Abel 群, 故对任一 $z \in Z$, $\mathbf{1}_Z^C(z)$ 是恒等变换, 从而由 (**) 知 $(\xi_i)_C(z)$ 是恒等变换, 进而 $\lambda(z)$ 是恒等变换. 这就证明了 $Z \subseteq \mathrm{Ker}\lambda$. 因此, 由引理 2.8 知 $G_\lambda \neq G$. 从而由 Clifford 定理知 ξ_i 是 G_λ 的特征标的诱导特征标. 这就证明了 (*), 从而定理 2.3 得证. □

习　题

1. 设 $G = C \times P$, P 是 p- 群, C 是阶与 p 互素的循环群. 则

(i) G 是幂零群.

(ii) G 的子群也是初等群.

(iii) C 恰为 G 中所有阶与 p 互素元的集合, P 恰为 G 中所有阶为 p 的幂的元的集合.

2. 证明拟初等群的子群也是拟初等群.

3. (广义特征标的 Brauer 刻画) 设 $\varphi \in \mathrm{cf}_{\mathbb{C}}(G)$. 则 $\varphi \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(G)$ 当且仅当对于 G 的任一初等子群 H 有

$$\varphi_H \in \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(H).$$

§3 Green 定理：Brauer 定理的一个逆

令 $\mathcal{E}$ 是 G 的初等子群的集合. 则 Brauer 定理断言

$$\mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(G) = \mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(G). \tag{*}$$

本节要证明 Brauer 定理的一个逆：若 G 的子群族 $\mathcal{E}'$ 满足

$$\mathrm{ch}_{\mathcal{E}'}(G) = \mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(G),$$

则 $\forall H \in \mathcal{E}$, 存在 $H' \in \mathcal{E}'$ 使得 H 含于 H' 的某一共轭. 从而在此意义下, $\mathcal{E}$ 是满足 (*) 的最小子群族.

为此首先证明如下引理：

3.1 引理 设 $R = \mathbf{Z}[\omega]$, ω 是 $|G|$ 次单位根. 设 $\langle x\rangle P$ 是 G 的初等子群, 其中 x 的阶与 p 互素, P 是 $C_G(x)$ 的 Sylow p- 子群. 若 G 的子群 H 不含 $\langle x\rangle P$ 的任一共轭子群, 则对任一 $\psi \in \mathrm{ch}_{\mathbf{C}}(H)$ 有 $\psi^G(x) \in pR$.

证 令 C_x 是 x 所在的 G 的共轭类. 则由习题 IV.2.5 知

$$\psi^G(x) = \frac{|C_G(x)|}{|H|} \sum_{y \in C_x \cap H} \psi(y).$$

令 $\{C_1, \cdots, C_t\}$ 是 $C_x \cap H$ 中所含的互异的 H 共轭类的集合 (此处 $C_x \cap H$ 可能是空集). 设 $h_i \in C_i$, $1 \le i \le t$. 则 h_i 的 H 共轭元的个数为

$$|C_i| = [H : H \cap C_G(h_i)].$$

于是

$$\begin{aligned}\psi^G(x) &= \frac{|C_G(x)|}{|H|} \sum_{i=1}^{t} |C_i| \psi(h_i) \\ &= \sum_{i=1}^{t} a_i \psi(h_i),\end{aligned}$$

其中 $a_i = \frac{|C_G(h_i)|}{|H \cap C_G(h_i)|}$, 这里用到这样的事实: x 与 h_i 在 G 中共轭, 故 $|C_G(x)| = |C_G(h_i)|$. 于是 $a_i \in \mathbf{Z}$. 因 $\psi(h_i) \in R$, 故只要证明 $p|a_i$, $1 \leq i \leq t$.

若存在 i 使 $p \nmid a_i$. 则 $|C_G(h_i)|$ 与 $|H \cap C_G(h_i)|$ 有相同的 p 部分, 从而 $H \cap C_G(h_i)$ 的 Sylow p- 子群 P_i 也是 $C_G(h_i)$ 的 Sylow p-子群. 令 $x = gh_ig^{-1}$. 则 ${}^gP_i$ 也是 $C_G(x)$ 的 Sylow p- 子群. 从而 ${}^gP_i$ 与 P 在 $C_G(x)$ 中共轭, 进而 $\langle x\rangle P$ 与 $\langle x\rangle {}^gP_i$ 共轭, 但

$$\langle x\rangle {}^gP_i = {}^g(\langle h_i\rangle P_i), \quad \langle h_i\rangle P_i \subseteq H,$$

故 H 包含 $\langle x\rangle P$ 的共轭子群 $\langle h_i\rangle P_i$, 这与题设矛盾! □

3.2 定理 (J. A. Green) 设 $\mathcal{E}'$ 是满足 $\mathrm{ch}_{\mathcal{E}'}(G) = \mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(G)$ 的子群族. 则 G 的每个初等子群均含于 $\mathcal{E}'$ 中某一群的共轭.

证 否则, 设 $\langle x\rangle P$ 是 G 的初等子群且不含于 $\mathcal{E}'$ 中任一群的共轭. 则不妨设 P 是 $C_G(x)$ 的 Sylow p- 子群 (否则, 取 $C_G(x)$ 的 Sylow p- 子群 P', 则 $P \subseteq P'$. 用 $\langle x\rangle P'$ 代替 $\langle x\rangle P$). 则由题设和引理 3.1 可知

$$\varphi(x) \in pR, \quad \forall \varphi \in \mathrm{ch}_{\mathcal{E}'}(G).$$

特别地, $1_G(x) = 1 \in pR$, 矛盾! □

§4 Brauer 分裂域定理

我们看到, 前面许多定理都需要在分裂域中才成立, 而处理一般域上的表示往往也是寻找与分裂域上表示的联系. 本节首先给出域 F 是有限群 G 的分裂域的进一步刻画; 其次证明特征零域上的 Brauer 分裂域定理, 最后导出任一含有 m 次本原单位根的域均是 G 的分裂域, 这里 m 是有限群 G 的指数.

4.1　对于任一域 F, 其代数闭包 $\overline{F}$ 总是任一有限群 G 的分裂域. 因此我们总设 $F \subseteq K$, K 是 G 的分裂域. 设 (V, ρ) 是 G 的 K- 表示. 若存在 V 的一组基 B 使得对于任一 $g \in G$ 矩阵 $\rho_B(g)$ 都是 F 上的矩阵, 则称 (V, ρ) 能在 F 中实现.

4.2　**定理**　设 $F \subseteq K$, K 是 G 的分裂域. 则下述命题等价:

(i) F 是 G 的分裂域.

(ii) $\overline{\mathrm{Irr}_K}G = \{\rho^K \mid \rho \in \overline{\mathrm{Irr}_F}G\}$.

(iii) G 的任一不可约 K- 表示均能在 F 中实现.

若 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, 则上述等价的命题还等价于下述等价的命题:

(iv) $\mathrm{Irr}_K G = \mathrm{Irr}_F G$.

(v) $\mathrm{Irr}_K G \subseteq \mathrm{Irr}_F G$.

证　(i) $\Rightarrow$ (ii): 即推论 III.9.11.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 因为 $\rho^K(g)$ 与 $\rho(g)$ 在相应基下的矩阵完全相同, $\forall g \in G$, 故 ρ^K 能在 F 中实现.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 设 (V, ρ) 是 G 的任一不可约 F- 表示. 则 (V^K, ρ^K) 也是 G 的不可约 K- 表示. 事实上, 若 U 是 (V^K, ρ^K) 的不可约真子 K- 表示, 则由题设 U 能在 F 中实现, 从而 U 也是 V 的不可约真子 F- 表示, 矛盾.

于是, 根据引理 III.9.2 有

$$\dim_F \mathrm{Hom}_{FG}(V, V) = \dim_K \mathrm{Hom}_{KG}(V^K, V^K) = 1,$$

从而 $\mathrm{Hom}_{FG}(V, V) \cong F$. 根据定义 F 是 G 的分裂域.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): 因为 ρ^K 的特征标与 ρ 的特征标相同, 由此即知.

(iv) $\Rightarrow$ (v): 显然.

现在设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 我们来证明 (v) $\Rightarrow$ (iii).

设 (V,ρ) 是 G 的任一不可约 K- 表示，其特征标为 χ. 则由题设存在 G 的不可约 F- 表示 (U,φ) 使得其特征标为 χ. 从而 (U^K,φ^K) 是 G 的 K- 表示，其特征标也为 χ. 因 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, 故可将 φ^K 分解成不可约 K- 表示的直和

$$\varphi^K \cong a_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus a_s\rho_s, \quad a_i \geq 0,\ \rho_i \ncong \rho_j\ (i \neq j),$$

其中 $\rho_1 = \rho$. 设 ρ_i 的特征标为 χ_i. 则 $\chi = \sum\limits_i a_i\chi_i$. 因 K 是 G 的分裂域，故 $(\chi,\chi) = 1$. 于是

$$1 = (\chi,\chi) = (\chi, \sum_i a_i\chi_i) = a_1(\chi,\chi) = a_1,$$

故 $\varphi^K \cong \rho \oplus \cdots \oplus a_s\rho_s$. 因为 φ^K 能在 F 中实现，从而其直和项 ρ 也能在 F 中实现，这就完成了证明. □

下述定理 Burnside, Maschke 和 Schur 都曾研究过，最后为 Brauer 所证明.

4.3 定理 (Brauer) 设 m 是有限群 G 的指数，F 是含有一个 m 次本原单位根的特征为零的域. 则 F 是 G 的所有子群的分裂域.

特别地，m 次分圆域 $\mathbf{Q}(\omega)$ 是 G 的所有子群的分裂域.

证 因为子群的指数是群的指数的因子，故只要证明 F 是 G 的分裂域.

由定理 4.2, 只要证明 $\mathrm{Irr}_{\overline{F}}G \subseteq \mathrm{Irr}_F G$, 其中 $\overline{F}$ 是 F 的代数闭包. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\overline{F}}G$. 则由 Brauer 诱导定理知 χ 是形如 λ^G 的特征标的整线性组合，其中 λ 是 G 的某一初等子群 H 的 1 次 $\overline{F}$- 特征标. 对于任一 $h \in H$, $h^m = 1$, 故 $\lambda(h)^m = 1$, 即 $\lambda(h)$ 是 m 次单位根，从而 $\lambda(h) \in F$. 因此 $\lambda \in \mathrm{Irr}_F H$, 从而 λ^G 是 G 的 F- 特征标. 于是

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} a_i\chi_i,$$

其中 χ_i 是 G 的不可约 F- 特征标， a_i 是正整数，从而

$$1=(\chi,\chi)=\sum_{i=1}^{r}a_i^2(\chi_i,\chi_i).$$

因 $\mathrm{char}F=0$, (χ_i,χ_i) 均为正整数，故必有 $r=1$ 且 $a_1=1$, 即 $\chi\in\mathrm{Irr}_F G$. □

为了证明 Brauer 的分裂域定理对特征 p 的域也对，我们需要下述定理，它本身对研究特征 p 的域上表示也有重要的意义.

4.4　定理　设 $\mathrm{char}F=p>0$, K 是 F 的扩域， (V,ρ) 是 G 的绝对不可约 K- 表示， χ 是其特征标. 设 $\chi(g)\in F$, $\forall g\in G$. 则存在 G 的绝对不可约 F- 表示 η 使得 $\rho\cong\eta^K$.

证　先设 K 是有限域.

容易看出，不妨设 F 是 K 的极大子域. 令 A 是 $\rho(g)$, $g\in G$, 的 F- 线性组合. 则 A 可视为 $M_n(K)$ 的 F- 子代数，其中 $n=\dim_K V$. 令 $Z(A)$ 是 A 的中心. 则 $\forall a\in Z(A)$, a 与所有 $\rho(g)$ 可换，故 $a\in\mathrm{End}_{KG}(V)=K\cdot 1_V$, 即 a 是 K 上的纯量矩阵. 故 $F1_V\subseteq Z(A)\subseteq K1_V$, 从而 $Z(A)$ 是有限整环，故 $Z(A)$ 必是域. 由 F 的极大性知 $Z(A)=F1_V$ 或 $Z(A)=K1_V$. 我们断言 $Z(A)=F1_V$.

(若否，则 $Z(A)=K1_V$. 故 $A=Z(A)A=KA=\rho(KG)$. 而 ρ 是 G 的绝对不可约 K- 表示，故由定理 III.5.5(ii) 知 $\rho(KG)=M_n(K)$. 取 $\lambda\in K-F$, 则存在 $a\in A$ 使得 $\mathrm{tr}(a)=\lambda\notin F$. 另一方面，由题设 $\chi(g)\in F$, $\forall g\in G$, 知 $\mathrm{tr}(a)\in F$, 矛盾 !)

其次，我们断言 A 是半单 F- 代数.

(事实上, 若 A 有幂零理想 I, 则 KI 是 $KA=\rho(KG)=M_n(K)$ 的幂零理想，而 $M_n(K)$ 是单代数，故 $KI=0$, 从而 $I=0$.)

于是 A 是 s 个全矩阵代数的直积，因为 $s \leq \dim_F Z(A) = 1$，故 $s = 1$，$A \cong M_m(F')$，F' 是 F 上有限维可除代数. 但 F 是有限域，故由 Wedderburn 定理知 F' 是域. 再由 $Z(A) = F \cdot 1_V$ 知 $F' = F$. 这就证明了

$$A \cong M_m(F).$$

令 U 是单代数 A 上唯一的单模. 则由定理 III.4.7(ii) 知 $\mathrm{End}_A(U) \cong F$. 令 $\varphi: A \to \mathrm{End}_F(U)$ 是 A- 模 U 相应的代数同态. 利用代数同态 $\rho: FG \to A$ 我们得到代数同态 $\eta = \varphi\rho: FG \to \mathrm{End}_F(U)$, 于是得到 G 的 F- 表示 (U, η) ，且 $\mathrm{End}_{FG}(U) = \mathrm{End}_A(U) \cong F$. 这表明 U 是 G 的绝对不可约 F- 表示.

剩下只要证 $\rho \cong \eta^K$. 由引理 III.9.7 知存在单 FG- 模 W 使得

$$\mathrm{Hom}_{KG}(W^K, V) \neq 0.$$

若能证明 $W \cong (U, \eta)$, 则 η^K 有商模 (V, ρ). 但 η 绝对不可约，故 η^K 是单 KG- 模，从而 $\eta^K \cong \rho$.

假设 $W \ncong (U, \eta)$. 则由定理 III.5.6 知存在 $b \in FG$ 使得

$$b \cdot W = 0, \ b \cdot U \neq 0.$$

从而 $bW^K = 0$. 因 V 是 W^K 的同态像，故 $b \cdot V = 0$, 即 $\rho(b) = 0$, 从而 $\eta(b) = \varphi\rho(b) = 0$, 即 $b \cdot U = 0$. 矛盾！

再设 K 是无限域.

不妨设 K 是代数闭域. 则 K 的素域为 $\mathbf{Z}_p$. 由推论 III.9.13 知存在 $\mathbf{Z}_p$ 的有限扩域 L 使得 L 是 G 的分裂域. 因 K 代数闭，故可设 $K \supseteq L$. 于是由推论 III.9.11 知存在 $\tau \in \mathrm{Irr}_L G$ 使得 $\rho \cong \tau^K$.

因 L 是 G 的分裂域，故 τ 绝对不可约且其特征标在 $L \cap F$ 中取值. 因 L 是有限域，故由前一部分证明知存在绝对不可约 $L \cap F$-

表示 η 使得 $\tau \cong \eta^L$. 于是 $\rho \cong \eta^K$, η 当然也是 G 的绝对不可约 F-表示. □

4.5　定理　设 m 是 G 的指数, F 是含有 m 次本原单位根的域. 则 F 是 G 的所有子群的分裂域.

证　由 Brauer 分裂域定理, 只要证当 $\mathrm{char}F = p > 0$ 时结论成立, 并且只要证明 F 是 G 的分裂域.

设 K 是 F 的代数闭域. 则 K 是 G 的分裂域. 因为 F 含有 m 次本原单位根, 故 $p \nmid |G|$. 因此由定理 4.2, 只要证 $\mathrm{Irr}_K G \subseteq \mathrm{Irr}_F G$. $\forall \chi \in \mathrm{Irr}_K G$, χ 是 G 的绝对不可约 K- 表示的特征标, 又 F 含 m 次本原单位根, 故 $\chi(g) \in F, \forall g \in G$, 故由定理 4.4 即知 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$. □

§5　不可约常表示的个数 (一般情形)

本节总设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 确定 G 的不可约 F- 表示的个数是一个基本问题. 若 F 是 G 的分裂域, 则定理 II.3.2 断言这个个数恰是 G 的共轭类的个数, 从而也是中心 $Z(FG)$ 的 F- 维数. 本节要讨论一般情形下 (即 F 未必是 G 的分裂域) 这个个数的群论意义.

5.1　设 m 是有限群 G 的指数, ω 是 (在 F 的扩域中的) 一个 m 次本原单位根. 令 $L = F(\omega)$. 因 L 是 F 上无重根多项式 $x^m - 1$ 的分裂域, 故 $L|F$ 是有限 Galois 扩张, 即 L 是 F 的有限可分正规扩域.

考虑 Galois 群 $\mathrm{Gal}(L|F)$. 它是剩余类加群 $\mathbf{Z}_m$ 的单位群 $U(\mathbf{Z}_m)$ 的一个子群. 事实上, $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L|F)$, σ 完全由 $\sigma(\omega)$ 所确定; 而 $\sigma(\omega)$ 也是 m 次本原单位根, 故 $\sigma(\omega) = \omega^t$, $(t, m) = 1$, $1 \le t \le$

$m-1$. 以后将此 σ 记为 σ_t. 从而 $\mathrm{Gal}(L|F) \longrightarrow U(\mathbf{Z}_m)$, $\sigma_t \mapsto t$ 是群的单同态.

若 $\mathrm{char}F = 0$, 则 $\mathrm{Gal}(L|F) = U(\mathbf{Z}_m)$, 因为此时分圆多项式 (即以所有 m 次本原单位根为根的多项式, 它是 F 上的多项式, 参见 [V1], p.211) 是 F 上的不可约多项式.

显然, $\sigma_t(g) = g^t$ 给出了 $\mathrm{Gal}(L|F)$ 在 G 上的作用. 由此直接推出

$$G = \{g^t \mid g \in G\}, \forall \sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F).$$

将此作用的一个轨道中所有元的 G 共轭类的并集称为 G 的一个 F- 共轭类, 即 g' 与 g 属于同一 F- 共轭类当且仅当存在 $\sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F)$ 使得 g' 与 $g^t = \sigma_t(g)$ 在 G 中共轭. 特别地, g 与 g^t 属于同一 F- 共轭类, $\forall \sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F)$.

G 上的 F- 值函数 f 称为 F- 共轭类的类函数 (注意与类函数的区别), 如果 f 在 G 的每一个 F- 共轭类上均为常值函数. 令 $\mathrm{cf}^F(G)$ 是 G 上所有 F- 共轭类的类函数的集合. 则 $\mathrm{cf}^F(G)$ 是 F-向量空间, 显然 $\dim_F \mathrm{cf}^F(G)$ 恰是 G 的 F- 共轭类的个数.

回顾在 III.10.5 中我们定义了 $\mathrm{Gal}(L|F)$ 在 $\mathrm{cf}_L(G)$ 上的作用. 设 $f: G \longrightarrow L$ 是 G 的类函数, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|F)$. 定义

$$\sigma(f)(g) := f^\sigma(g) := \sigma(f(g)), \forall g \in G.$$

若 χ 是 G 的 L- 特征标, 则 χ^σ 仍是 G 的 L- 特征标.

本节的目的是要证明如下定理:

5.2 定理 设 $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 则 G 的不可约 F- 表示的个数等于 G 的 F- 共轭类的个数.

证 设 $\chi \in \mathrm{Irr}_F G$. 对于任一 $g \in G$, $\chi(g)$ 是 $\rho(g)$ 的全部特征根 $\{\omega_i\}$ 的和, ω_i 均为 m 次单位根. 因 $\rho(g^t)$ 的全部特征根为

$\{\omega_i^t\}$, 故 $\chi(g^t)$ 是所有 ω_i^t 的和. 因 $\chi(g) \in F$, 故有

$$\begin{aligned}\chi(g) &= \sigma_t(\chi(g)) = \sigma_t(\sum_i \omega_i) \\ &= \sum_i \omega_i^t = \chi(g^t), \quad \forall \sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F).\end{aligned}$$

这表明 χ 是 G 上的 F- 共轭类的类函数, 即 $\chi \in \mathrm{cf}^F(G)$.

由定理 III.10.4 知 $\mathrm{Irr}_F G$ 是 $\mathrm{cf}_F(G)$ 中线性无关子集,因 $\mathrm{Irr}_F G \subseteq \mathrm{cf}^F(G) \subseteq \mathrm{cf}_F(G)$, 从而 $\mathrm{Irr}_F G$ 是 $\mathrm{cf}^F(G)$ 中线性无关子集. 因为 $|\overline{\mathrm{Irr}_F} G| = |\mathrm{Irr}_F G|$, 因此为了证明本定理, 只要证明任一 F- 共轭类的类函数 f 均是不可约 F- 特征标的 F- 线性组合.

因为 L 是 G 的分裂域 (定理 4.5), 故由定理 II.3.2 知

$$f = \sum_{\chi_i \in \mathrm{Irr}_L G} (f, \chi_i)\chi_i, \tag{*}$$

这里 $(f, \chi_i) \in L$. 我们断言 $(f, \chi_i) \in F$.

由 Galois 理论知 F 恰是 $\mathrm{Gal}(L|F)$ 的不变子域, 因此欲证上述断言, 只要证明

$$\sigma_t((f, \chi_i)) = (f, \chi_i), \quad \forall \sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F).$$

因 f 是 F- 共轭类的类函数, 且 g 与 g^t 是 F- 共轭的, $\forall \sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F)$, 故

$$\sigma_t(f(g)) = f(g) = f(g^t), \ \forall g \in G, \sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F).$$

又因 $\chi_i(g)$ 是 m 次单位根的和, $\sigma_t(\omega) = \omega^t$, 故

$$\sigma_t(\chi_i(g)) = \chi_i(g^t), \ \forall g \in G, \ \sigma_t \in \mathrm{Gal}(L|F).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\sigma_t((f,\chi_i)) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sigma_t(f(g))\sigma_t(\chi_i(g^{-1}))\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g^t)\chi_i(g^{-t})\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}f(h)\chi_i(h^{-1})\\ &= (f,\chi_i),\end{aligned}$$

此处用到了 $G=\{g^t \mid g\in G\}$, $\forall\sigma_t\in \mathrm{Gal}(L|F)$. 这就证明了断言 $(f,\chi)\in F$.

令 $a_i:=(f,\chi_i)\in F$. 则

$$f=\sum_{\chi_i\in \mathrm{Irr}_L G}a_i\chi_i.$$

因 f 也是 G 的 L- 值类函数, 故可将 $\mathrm{Gal}(L|F)$ 作用在 f 上, 并且有

$$f^\sigma=f,\ \forall\sigma\in \mathrm{Gal}(L|F),$$

从而得到

$$f=\sum_{\chi_i\in \mathrm{Irr}_L G}a_i\chi_i^\sigma.$$

这表明, 对于任一 $\chi_i\in \mathrm{Irr}_L G$, χ_i 所在的 $\mathrm{Gal}(L|F)$- 轨道 $\mathcal{O}_i$ 中任一元 χ_i^σ 的系数均等于 a_i. 令 Ω 是 $\mathrm{Irr}_L G$ 的所有 $\mathrm{Gal}(L|F)$- 轨道的集合. 则有

$$f=\sum_{\mathcal{O}_i\in\Omega}a_i\Big(\sum_{\chi\in\mathcal{O}_i}\chi\Big).$$

而由推论 III.10.8 知 $\sum\limits_{\chi\in\mathcal{O}_i}\chi$ 恰是一个不可约 F- 特征标, 于是 f 是不可约 F- 特征标的 F- 线性组合. 这就完成了定理的证明. □

习　　题

1. 设 t 是与 $|G|$ 互素的正整数， $\chi \in \mathrm{cf}_F(G)$， $\mathrm{char}F \nmid |G|$. 定义 $\chi^t: G \to F$, 其中 $\chi^t(g) = \chi(g^t)$. 则 $\chi^t \in \mathrm{cf}_F(G)$. 证明:

$$(\chi^t, \psi^t) = (\chi, \psi), \quad \forall\, \chi, \psi \in \mathrm{cf}_F(G).$$

第6章 紧群的表示

在本书的最后，我们将抽象群表示的基本概念推广到连续群上去. 我们将看到，紧群的表示在许多方面与有限群的表示十分相似.

§1 紧 群

首先简要回顾有关拓扑空间的必需知识. 未加证明的结论均可从 M. A. Armstrong 著《基础拓扑学》([A]) 和江泽涵著《拓扑学引论》([J]) 中找到 (特别地，两本书关于拓扑空间的定义是相同的).

1.1 设 X 是一个集合，τ 是 X 的一些子集作成的非空集合，其中的元素称为 X 的开集. τ 称为 X 上的一个拓扑，如果满足下述条件:

(i) 任意多个开集之并仍是开集;

(ii) 有限多个开集之交仍是开集;

(iii) X 与空集是开集.

配备了一个拓扑的集合称为拓扑空间.

例 1 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 和 n 维西空间 $\mathbf{C}^n$ 对于通常的开集作成拓扑空间. (即 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 的子集 U 称为开集，如果对于任一 $x \in U$, 总存在 $\varepsilon > 0$ 使得以 x 为中心、以 ε 为半径的球整个落

入 U 内.) 以后提到 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 的拓扑结构时，总是指这种意义下的开集作成的拓扑.

例 2　设 X 是任一非空集合. 若取 τ 为 X 的所有子集作成的集合，则 τ 是 X 上的一个拓扑. 相应的拓扑空间 X 称为 X 上的离散拓扑空间.

例 3　设 X 是配备了拓扑 τ 的拓扑空间，Y 是 X 的子集. 令

$$\tau' = \{\, U \cap Y \mid U \in \tau \,\}.$$

则 Y 是具有 τ' 的拓扑空间，称为 X 的子空间，τ' 称为子空间拓扑或诱导拓扑.

例 4　设 X 与 Y 均为拓扑空间. 卡氏积 $X \times Y$ 中形如 $U \times V$ 的子集的所有可能的并集作成的集合，其中 U 取遍 X 的开集，V 取遍 Y 的开集，是 $X \times Y$ 上的一个拓扑. 由此得到的拓扑空间 $X \times Y$ 称为积拓扑空间. 类似地定义有限多个拓扑空间的积拓扑空间.

例 5　设 X 是拓扑空间，$\mathcal{P}$ 是 X 的一个划分 (即 $\mathcal{P}$ 为 X 的一组互不相交的非空子集使得 $X = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}} P$). 令 Y 是 $\mathcal{P}$ 中成员作成的集合，映射 $\pi:\ X \to Y$ 将每一点 $x \in X$ 映到 x 所属的 $\mathcal{P}$ 中成员. 定义 Y 的子集 O 为开集当且仅当 $\pi^{-1}(O)$ 是 X 的开集. 这样的拓扑称为 Y 上的粘合拓扑，相应的拓扑空间 Y 称为粘合空间.

1.2　拓扑空间 X 的子集 U 称为闭集，如果 U 的余集 $X - U$ 是开集. 由 De Morgen 律立即推出：任意多个闭集之交仍是闭集；有限多个闭集之并仍是闭集；X 与空集均为闭集.

拓扑空间 X 的子集 N 称为点 $x \in X$ 的一个邻域，如果存在开集 O 使得 $x \in O \subseteq N$.

点 $x \in X$ 称为拓扑空间 X 的子集 U 的极限点，如果 x 的任一邻域与 $U-\{x\}$ 的交均非空．子集 U 是闭集当且仅当它含有 U 的所有极限点．

子集 U 的闭包 $\overline{U}$ 是指包含 U 的最小闭集．它是 U 与其所有极限点的并集．一个子集 U 是闭集当且仅当 $U=\overline{U}$．若 $\overline{U}=X$，则称 U 是稠密集．稠密集与 X 的任一开集的交均非空．

拓扑空间 X 称为连通的，如果 X 不能分解成两个不相交的开集之并，或等价地， X 的既为开集也为闭集的子集只有 X 与空集．如果 X 不是连通的，则 X 可以分解成一些连通子空间的并集，使得这些连通子空间的闭包两两互不相交，称这些连通子空间为 X 的连通分支．

积拓扑空间 $X \times Y$ 连通当且仅当 X 与 Y 均连通．

1.3　设 X 与 Y 均为拓扑空间．映射 $f: X \to Y$ 称为连续映射，如果 Y 的任一开集在 f 下的原像是 X 的开集．下述断言是等价的：

(i) $f: X \to Y$ 是连续映射．

(ii) Y 的任一闭集在 f 下的原像是 X 的闭集．

(iii) $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$，对于 X 的任一子集 U．

(iv) $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(\overline{V})$，对于 Y 的任一子集 V．

若 $f: X \to Y$ 是连续的双射 (既单又满)，并且逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 也是连续映射，则称 f 是一个同胚．此时称 X 与 Y 同胚或拓扑等价．

将开集映为开集的映射称为开映射；将闭集映为闭集的映射称为闭映射．

拓扑空间 X 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射 f 称为 X 上的实值连续函数．映射 $f: X \to \mathbf{R}$ 是连续的当且仅当对于任一 $x \in X$ 和任一正数

ε, 均存在 x 的邻域 N 使得

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in N.$$

连通空间的连续像是连通的.

设 $f: Z \to X \times Y$. 则 f 连续当且仅当 $p_1 f: Z \to X$ 和 $p_2 f: Z \to Y$ 均连续, 其中 $p_1((x,y)) = x$, $p_2((x,y)) = y$, $\forall x \in X$, $y \in Y$. 这两个投影映射 p_1 和 p_2 均是连续的开映射.

1.4 设 X 是拓扑空间. 若 X 中任意两个不同的点有互不相交的邻域, 则称 X 是 Hausdorff 空间; 若 X 中任意两个不同的点各有一个邻域不包含另一点, 则称 X 是 T_1- 空间. 显然 Hausdorff 空间是 T_1- 空间; Hausdorff 空间的子空间也是 Hausdorff 空间; 不过 Hausdorff 空间的粘合空间却未必是 Hausdorff 空间 (参见 [A], p.81).

设 X 是拓扑空间, $\mathcal{T}$ 是 X 的一组开集. 若 $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{T}} A = X$, 则称 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个开覆盖. 若 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个开覆盖, $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, 并且 $\mathcal{T}'$ 也是 X 的一个开覆盖, 则称 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个子覆盖.

拓扑空间 X 称为紧致拓扑空间, 如果 X 的任一开覆盖均有有限的子覆盖.

拓扑空间 X 的子集 Y 称为紧致子集, 如果子空间 Y 是紧致拓扑空间.

实数轴上任一闭区间均为紧致子集.

我们不加证明地罗列一些有关的基本性质, 其证明均可在江泽涵的书和 Armstrong 的书中找到.

命题 (i) 欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 和酉空间 $\mathbf{C}^n$ 的子集是紧致子集当且仅当它是有界闭集 (有界是指包含在一个以原点为中心的半径有限的球内).

(ii) 紧致空间的闭集是紧致子集; Hausdorff 空间的紧致子集是闭集. 从而紧致 Hausdorff 空间中子集是紧致子集当且仅当它是闭集.

(iii) 紧致空间上的实值连续函数是有界的, 并能达到其上下确界.

(iv) 紧致空间的连续像是紧致空间.

(v) 设 X 是拓扑空间. 则 X 是 T_1- 空间当且仅当独点集均为闭集. 特别地, 若 X 是 Hausdorff 空间, 则独点集均为闭集.

(vi) 积拓扑空间 $X\times Y$ 是紧致空间当且仅当 X 与 Y 均为紧致空间; $X\times Y$ 是 Hausdorff 空间当且仅当 X 与 Y 均为 Hausdorff 空间.

(vii) 紧致空间内的无限子集必有极限点.

(viii) 紧致空间到 Hausdorff 空间的连续映射 f 是闭映射; 特别地, 若 f 还是双射, 则 f 是同胚.

1.5 定义 (i) 群 G 称为拓扑群, 如果 G 又是 Hausdorff 拓扑空间, 并且群的乘法映射

$$\begin{aligned} G\times G &\longrightarrow G,\\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

和逆映射

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G,\\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

均是拓扑空间的连续映射, 其中 $G\times G$ 的拓扑为乘积拓扑.

(ii) 设 G 是拓扑群. 如果 G 作为拓扑空间还是紧致拓扑空间, 则称 G 是紧致拓扑群, 简称紧群.

注　拓扑群的另一种定义是不要求拓扑空间是 Hausdorff 的，例如 [Vin], [CY], [Q] 等. 本书采用的定义如 [Sim], [YX] 等. 这样做是考虑到我们感兴趣的拓扑群均满足 Hausdorff 公理；同时，加上这一条件可自由地应用邦德列雅金的经典著作《连续群》(上册)([P]) 中的结果 (注意到该书中拓扑空间的定义稍微不同，独点集在该书中是闭集，参见该书 p.56. 而对于本书中拓扑空间的定义一般是没有这个结论的，参见命题 1.4(v)).

1.6　例 1　任一群对于离散拓扑是拓扑群；任一有限群对于离散拓扑是紧群.

例 2　拓扑群的直积是拓扑群，且它是紧群当且仅当每个因子群均为紧群.

例 3　$\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 对于向量的加法作成拓扑 Abel 群. 从而 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 上的有限维向量空间是拓扑 Abel 群.

例 4　单位圆周 S^1 (亦可看成绝对值为 1 的复数集或平面上旋转群) 对于复数的乘法和 $\mathbf{R}^2$ 的子空间拓扑作成拓扑群. 因为 S^1 是 $\mathbf{R}^2$ 中有界闭集，故 S^1 是紧群.

例 5　将 $\mathbf{R}$ 上的 n 阶矩阵的集合 $M_n(\mathbf{R})$ 等同于 n^2 维欧氏空间，特别地，它是 Hausdorff 空间. 则 $\mathbf{R}$ 上的一般线性群 $GL_n(\mathbf{R})$ 对于子空间拓扑作成拓扑群. 事实上，为了看出乘积映射 $m:\ M_n(\mathbf{R})\times M_n(\mathbf{R}) \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ 是连续映射，将 $M_n(\mathbf{R})$ 看成积拓扑 $\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ (n^2 个因子). 因此 m 连续当且仅当每个合成映射

$$M_n(\mathbf{R})\times M_n(\mathbf{R}) \xrightarrow{m} M_n(\mathbf{R}) \xrightarrow{\pi_{ij}} \mathbf{R}$$

连续，其中 π_{ij} 为投影映射，$1\le i,j\le n$. 设 $A=(a_{ij})$，$B=$

$(b_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$. 则

$$\pi_{ij} m(A,B) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

它是 A 与 B 中元素的多项式，故 $\pi_{ij} m$ 均连续. 因此 $GL_n(\mathbf{R})$ 的乘积映射是连续映射.

为了看出 $GL_n(\mathbf{R})$ 的逆映射 $i: GL_n(\mathbf{R}) \to GL_n(\mathbf{R})$ 是连续的，只要说明合成映射

$$GL_n(\mathbf{R}) \xrightarrow{i} GL_n(\mathbf{R}) \xrightarrow{\pi_{jk}} \mathbf{R}, \quad 1 \le j,\ k \le n,$$

均为连续映射. 而

$$\pi_{jk} i(A) = \pi_{jk}(A^{-1}) = \frac{A_{kj}}{\det(A)},$$

其中 A_{jk} 是 a_{jk} 的代数余子式， $\det(A)$ 是 A 的行列式，它们均是 A 中元素的多项式，从而 $\pi_{jk} i$ 连续.

类似地证明 $\mathbf{C}$ 上的一般线性群 $GL_n(\mathbf{C})$ 是拓扑群.

因为行列式映射是 $GL_n(\mathbf{R})$(或 $GL_n(\mathbf{C})$) 到 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$) 的连续映射，并且 $GL_n(\mathbf{R})$(或 $GL_n(\mathbf{C})$) 恰是所有非零实数 (或非零复数) 的原像，故 $GL_n(\mathbf{R})$(或 $GL_n(\mathbf{C})$) 是 $M_n(\mathbf{R})$(或 $M_n(\mathbf{C})$) 的开子集. 因 $\mathbf{R}^{n^2}$ 和 $\mathbf{C}^{n^2}$ 的紧致子集均是有界闭集，故 $GL_n(\mathbf{R})$ 和 $GL_n(\mathbf{C})$ 均非紧群.

例 6 令

$$\begin{aligned}
O_n &= \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid A \text{ 是正交阵}\}, \\
SO_n &= \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\}, \\
U_n &= \{A \in GL_n(\mathbf{C}) \mid A \text{ 是酉阵}\}, \\
SU_n &= \{A \in U_n \mid \det(A) = 1\}.
\end{aligned}$$

将 O_n, SO_n, U_n, SU_n 分别称为正交群、特殊正交群、酉群和特殊酉群. 配以子空间拓扑，它们均作成拓扑群.

下面说明 O_n 与 SO_n 均为紧群. 为了说明 O_n 是紧群, 只要证明 O_n 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 内的一个有界闭集即可. 设 $A=(a_{ij})\in O_n$. 则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj}=\delta_{ik},\quad 1\le i,k\le n.$$

定义映射 f_{ik} : $M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$:

$$f_{ik}(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj}.$$

则 O_n 是下列所有集合的交集:

$$f_{ik}^{-1}(0),\quad 1\le i,k\le n, i\ne k;$$
$$f_{ii}^{-1}(1),\quad 1\le i\le n.$$

由于每个 f_{ik} 均为连续映射, 故上述每个集合均为闭集, 从而 O_n 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的闭集. 又从 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2=1$ 可推出 $|a_{ij}|\le 1$, $\forall i,j$, 因此 O_n 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的有界集. 这就证明了 O_n 的紧性.

又因行列式映射是 O_n 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射, 而 SO_n 恰是 $\{1\}$ 的原像, 故 SO_n 是 O_n 的闭集, 从而 SO_n 也是紧群.

同理说明 U_n 和 SU_n 也是紧群.

1.7　定义　设 G_1 与 G_2 均为拓扑群. 若映射 f : $G_1\to G_2$ 既是群同态也是拓扑空间的连续映射, 则称 f 是拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 的同态映射或同态.

若 f 还是开映射, 则称 f 是开同态;

若 f 还是同胚, 则称 f 是拓扑群的同构.

1.8　例 1　映射 f : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$, 其中 $f(x)=e^x$, 是拓扑加群 $\mathbf{R}$ 到正实数拓扑乘法群 $\mathbf{R}_+$ 的同构.

例 2 映射 $f:\ O_2 \to S^1$, 其中

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longmapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

是拓扑群的同构.

1.9 拓扑群的子集 H 如果对于群的运算构成子群 (或正规子群) 并且配备了子空间拓扑, 则称 H 是拓扑群 G 的子群 (或正规子群), 此时易证 H 本身也是拓扑群.

注 在 [P] 中子群要求是闭集. 我们不作此项约定.

紧群的子群是紧群当且仅当它是闭子群.

1.10 下面举出拓扑群的一些初等性质.

1° 设 G 是拓扑群, $a \in G$. 则左乘映射

$$l_a:\ G \to G,\ \ x \mapsto ax,\ \ \forall x \in G$$

和右乘映射

$$r_a:\ G \to G,\ \ x \mapsto xa,\ \ \forall x \in G$$

均是拓扑空间的同胚. 因此, 拓扑群是齐性的, 即 $\forall x, y \in G$, 存在 G 的同胚将 x 映到 y. 从而 G 的每点从局部看呈现出相同的拓扑结构.

事实上, l_a 是如下连续映射的合成:

$$\begin{aligned} G &\to G \times G \longrightarrow G, \\ x &\mapsto (a, x) \longmapsto ax, \end{aligned}$$

从而 l_a 是连续映射. 又 $l_a^{-1} = l_{a^{-1}}$, 故 l_a 是同胚.

2° 若 A 是拓扑群的开集 (或闭集), 则对于任一 $a \in G$, Aa, aA, A^{-1} 也是开集 (或闭集).

事实上

$$Aa = r_{a^{-1}}^{-1}(A),\quad aA = l_{a^{-1}}^{-1}(A),\quad A^{-1} = i^{-1}(A),$$

其中 i 是求逆映射，故由 $r_{a^{-1}}, l_{a^{-1}}$ 和 i 的连续性即得.

3° 若 A 是拓扑群 G 的开集，则对于 G 的任一子集 B, 群乘积 AB 与 BA 均为开集.

事实上，由 $AB = \bigcup\limits_{b\in B} Ab$ 和 1° 即知.

同理，我们有

4° 若 A 是拓扑群的闭集，且 B 是有限子集，则 AB 与 BA 均是闭集.

5° 若 A 与 B 均为拓扑群 G 的紧致子集，则 AB 也是 G 的紧致子集.

事实上，由于积映射 $m:\ A\times B\to AB$ 是连续映射且 $A\times B$ 紧致，故 AB 紧致.

6° 拓扑群 G 的每一开子群 H 均为闭子群；每个指数有限的闭子群 N 是开子群.

事实上，$G - H = \bigcup\limits_{x\notin H} xH$, 由 2° 知 $G-H$ 是开集，从而 H 是闭集.

同理，$G - N = \bigcup\limits_{x\notin N} xN$, 因 N 指数有限，故由 2° 知 $G-N$ 是闭集，从而 N 是开集.

7° 拓扑群 G 的含单位元的任一邻域 V 的子群 H 是开子群.

事实上，$H = HV$, 由 3° 即知 H 是开集.

1.11 现在我们来讨论拓扑群的同态基本定理.

设 G 是拓扑群，H 是其子群. 则 G 关于 H 的左陪集的集合 G/H 对于粘合拓扑作成拓扑空间. 这个空间是 Hausdorff 的当且仅当 H 是闭子群. (事实上，若 G/H 是 Hausdorff 空间，则单位

元所在的陪集 H 是 G/H 的独点集，从而是闭集，于是它在典范映射下的原像 H 是 G 的闭集．反之，参见 [P], p.115.)

命题(拓扑群的同态基本定理) (i) 设 H 是拓扑群 G 的闭正规子群．则代数商群 G/H 对于粘合拓扑作成拓扑群，且典范映射 $\pi: G \to G/H$ 是拓扑群的开同态.

若 G 是紧群，则 G/H 也是紧群.

(ii) 设 $f: G_1 \to G_2$ 是拓扑群的开同态．则 $\mathrm{Ker}f$ 是 G_1 的闭正规子群， $\mathrm{Im}f$ 是 G_2 的闭子群；且存在拓扑群的同构

$$\tilde{f}: G_1/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$$

使得 $f = \tilde{f}\pi$, 其中 π 是典范开同态.

若 G_2 连通，则 f 必为满射.

证 (i) 因 H 闭，由上述说明知 G/H 是 Hausdorff 空间，从而易知 G/H 是拓扑群．设 O 是 G 中的开集．因 $\pi^{-1}(\pi(O)) = OH$ 是 G 中开集，故由粘合拓扑的定义知 $\pi(O)$ 是 G/H 中的开集．从而推出 π 是开同态.

(ii) 因 $\mathrm{Ker}f = f^{-1}(1)$, 故由 $\{1\}$ 是 G_2 的闭集知 $\mathrm{Ker}f$ 是闭集，从而是闭正规子群．因 f 是开同态，故 $\mathrm{Im}f$ 是开子群，从而是闭子群.

若 G_2 连通，则 G_2 中既开又闭的非空子集只有 G_2, 故 $\mathrm{Im}f = G_2$.

显然，作为抽象群，映射 $\tilde{f}(g\mathrm{Ker}f) = f(g)$, $\forall g \in G_1$, 给出了 $G/\mathrm{Ker}f$ 到 $\mathrm{Im}f$ 的群同构．设 O 是 $\mathrm{Im}f$ 的开集．因 π 是开映射，f 是连续映射，故 $\pi \cdot f^{-1}(O) = \tilde{f}^{-1}(O)$ 是 G_1 的开集，从而 $\tilde{f}$ 连续．再设 O' 是 $G_1/\mathrm{Ker}f$ 的开集．则 $\pi^{-1}(O')$ 是 G_1 中开集，从而 $\tilde{f}(O') = f(\pi^{-1}(O'))$ 是 $\mathrm{Im}f$ 中开集，即 $\tilde{f}$ 是开映射，或等价地，$\tilde{f}^{-1}$ 是连续映射．于是 $\tilde{f}$ 是拓扑群同构. □

由上述命题我们看到，抽象群中子群在拓扑群中的类似物是闭子群 (而非子群)；抽象群中正规子群在拓扑群中的类似物是闭正规子群 (而非正规子群)；而抽象群中的群同态在拓扑群中的类似物则是开同态 (而非同态).

例

$$f:(\mathbf{R},+)\longrightarrow S^1,$$
$$x\longmapsto e^{i2\pi x}$$

是拓扑群的满开同态， $\mathrm{Ker}f=\mathbf{Z}$. 故有拓扑群的同构

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z}\cong S^1.$$

注　若 $f:\ G_1\to G_2$ 是拓扑群的满同态，且 G_1 是紧群，则 f 一定是开同态，也一定是闭同态．参见 [P], p.127.

1.12　命题　(i) 设 $f:\ G_1\to G_2$ 是拓扑群的满开同态， $N=\mathrm{Ker}f$. 则 f 诱导出如下两个集合之间的一一对应：

$$\{G_1\text{ 的含 }N\text{ 的闭子群 }\}\longrightarrow\{G_2\text{ 的闭子群 }\},$$
$$H\longmapsto H/N.$$

在这一对应下 G_1 的闭正规子群 K 映到 G_2 的闭正规子群 K/N，且有拓扑群的同构

$$G_1/K\cong(G_1/N)/(K/N).$$

(ii) 设 G 是紧群， H 与 N 分别是 G 的闭子群与闭正规子群．则 $H\cap N$ 是 H 的闭正规子群，且有拓扑群同构

$$NH/N\cong H/H\cap N.$$

证明参见 [P], p.126 和 p.129.

关于拓扑群更系统的知识参见 [P].

习　题

1. 若 G 是连通的拓扑群, 则 G 没有开的真子群, 也没有指数有限的闭真子群.

2. 设 G 为拓扑群. 若 H 是 G 的子群 (或正规子群), 则 $\overline{H}$ 也是子群 (或正规子群).

3. 紧致离散拓扑群是有限群.

4. 设 G 是拓扑群. 证明对角映射

$$f: G \to G \times G, \quad x \mapsto (x, x), \quad \forall x \in G,$$

是闭映射.

5. 设 G 是拓扑群, H 是 G 的闭子群. 则 $N_G(H)$ 和 $C_G(H)$ 是 G 的闭子群; 对每个 $x \in G$, $C_G(x)$ 也是 G 的闭子群.

6. 证明正交群 O_n 不连通.

7. 若 U 是拓扑群单位元 1 的任一邻域. 证明存在 1 的邻域 V 使得 $VV^{-1} \subseteq U$.

§2 紧群上的不变积分

在有限群 G 的表示论中, 经常要用到 G 上的函数 f 在 G 上的平均 $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f(g)$. 为了研究紧群的表示, 我们需要在无限群上作类似的平均. 这就是要在紧群上建立的不变积分 $\int_G f(x)\mathrm{d}x$, 或 Haar 测度 $\mathrm{d}x$.

2.1 定义 设 G 是紧群. 如果对于每一个定义在 G 上的实值连续函数 $f(x)$, 均存在一个实数, 记为 $\int_G f(x)\mathrm{d}x$, 满足下述条件:

(i) 线性: 对于实数 α,β 和 G 上的实值连续函数 f,g 有

$$\int_G (\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int_G f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_G g(x)\mathrm{d}x;$$

(ii) 正定性: 若 $f(x)\geq 0$, $\forall x\in G$, 则

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x\geq 0,$$

且等号成立当且仅当 $f\equiv 0$;

(iii) 不变性: $\forall g\in G$, 有

$$\int_G f(gx)\mathrm{d}x=\int_G f(xg)\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x;$$

(iv) 规范性:

$$\int_G 1\mathrm{d}x=1;$$

(v) 可逆性:

$$\int_G f(x^{-1})\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x,$$

则称在 G 上建立了一个不变积分.

2.2 例 1 对有限群 G, 令

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g).$$

则在 G 上建立了一个不变积分.

例 2 对于平面上旋转群 $G=S^1$, 令

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta,$$

则在 G 上建立了一个不变积分 (此处 f 是实值函数).

例 3 设 N 是紧群 G 的任一闭正规子群. 则 $\overline{G}=G/N$ 也是紧群, 其上不变积分可由 G 上的不变积分诱导出:

$$\int_{\overline{G}} f(x)\mathrm{d}x := \int_G \overline{f}(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\overline{f}(y) := f(yN)$, $\forall y \in G$.

紧群上不变积分的存在性与唯一性由下述定理保证:

2.3 定理 在任一紧群上有且仅有一种方法建立不变积分.

这里我们不打算给出此定理的证明, 读者可参见 [P], p.209 (或 [Q], p.286; 或 [CY], p.162; 或 [XHM], p.250).

2.4 对于定义在紧群 G 上的复值函数 $f(x)$, 总存在实值函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 使得 $f(x)=g(x)+\mathrm{i}h(x)$. 若 $g(x), h(x)$ 均连续, 则称 $f(x)$ 连续. 此时定义

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_G g(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_G h(x)\mathrm{d}x,$$

称为 G 上复值连续函数的不变积分. 容易验证, 它也满足线性、不变性、规范性和可逆性, 并且具有下述意义下的正定性: 若 $h(x)=0$ 且 $g(x)\geq 0$, 则 $\int_G f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $f(x)\equiv 0$.

2.5 设 G 与 H 均为紧群. 则 $P=G\times H$ 亦为紧群. P 上的连续实值函数 $f(z)$ 可看成两个变量 $x\in G$ 与 $y\in H$ 的连续实值函数. 固定 x, 则得到 H 上的实值连续函数 $f(x,y)$, 因此有不变积分

$$g(x) := \int_H f(x,y)\mathrm{d}y.$$

可以证明 $g(x)$ 是 G 上的连续实值函数，从而有

$$\int_G \left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

同理，有 $\int_H \left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$. 我们有

命题

$$\int_G \left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_H \left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_P f(z)\mathrm{d}z,$$

记为

$$\iint_{G\times H} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明参见 [P], p.217.

习　题

1. 验证对于紧群 G 上的复值连续函数 $f(x)$ 有

$$\overline{\int_G f(x)\mathrm{d}x} = \int_G \overline{f(x)}\mathrm{d}x.$$

2. 证明紧群 G 上的实值或复值连续函数的不变积分均满足

$$\left|\int_G f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_G |f(x)|\mathrm{d}x.$$

§3　紧群的线性表示、完全可约性

以下 F 均指实数域或复数域.

3.1 定义 设 G 是紧群，V 是有限维 F- 空间. 如果存在拓扑群的同态 $\rho: G \to GL(V)$, 则称 (V,ρ) 是 G 的一个 F- 线性表示，简称为 G 的表示.

注意 $GL(V)$ 与 $GL_n(F)$ 作为拓扑群是同构的，其中 $n = \dim_F V$.

紧群的表示与抽象群的表示的区别是增加了 ρ 是连续映射这一条件. 与抽象群的表示类似，给定紧群 G 的一个线性表示 (V,ρ) 等同于给定 G 在 V 上的一个连续的线性作用，这里连续是指线性映射 $G \times V \to V$ 是连续的. 因此，又将紧群 G 的表示 V 称为连续 G- 模.

3.2 定义 紧群 G 到拓扑群 $GL_n(F)$ 的一个拓扑群同态 ρ 称为 G 的一个 n 次矩阵表示.

与抽象群类似，紧群的线性表示与矩阵表示是一回事.

设 G 是紧群，ρ 是抽象群 G 的 n 次矩阵表示. 设 $\rho(g) = (a_{ij}(g))$, $\forall g \in G$. 则 $a_{ij}: G \longrightarrow F$, $g \mapsto a_{ij}(g)$ 是 G 上的 F- 值函数，并且 ρ 连续当且仅当 $a_{ij} = \pi_{ij}\rho$ 连续，其中 $\pi_{ij}: M_n(F) \to F$ 是将 n 阶矩阵送到其 (i,j)- 处元素的连续映射. 由此可见，ρ 是紧群 G 的 n 次矩阵表示当且仅当 a_{ij} 均为 G 上的连续函数，$1 \le i,\ j \le n$.

3.3 例 1 有限群 G 的 F- 表示是 G 作为离散紧群的 F- 表示.

例 2 令 $\rho_n: S^1 \to \mathbf{C}^*$, $e^{ix} \mapsto e^{i2\pi nx}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. 则对于每个 $n \in \mathbf{Z}$, ρ_n 是 S^1 的 1 次表示.

例 3 设 $G = O_n$(或 U_n), $V = M_n(\mathbf{R})$(或相应地，$V = M_n(\mathbf{C})$). 定义

$$\rho(A)X = AXA^{-1}, \quad \forall A \in G,\ X \in V.$$

则 ρ 是 G 的 n^2 维表示.

例 4　设 (V,ρ) 是紧群 G 的 F- 表示，U 是 V 的 F- 子空间且 $\rho(g)U\subseteq U$, $\forall g\in G$. 则 U 也是 G 的 F- 表示，称为 V 的子表示. (事实上，因为 $\rho:\ G\times V\to V$ 是连续映射，故 $\rho:\ G\times U\to U$ 也是连续映射.)

3.4　抽象群 G 的表示的许多概念与结论可以平行地搬到紧群上，只要对于这些概念与结论没有特别地标明要求 G 是有限群.

例如，对于紧群 G 的两个表示 (V,ρ) 和 (V',ρ'), 若存在 F- 线性映射 $f:\ V\to V'$ 使得

$$f\rho(g)=\rho'(g)f,\quad \forall g\in G,$$

则称 f 是 V 到 V' 的表示同态或 G- 模映射; 或 f 还是线性同构，则称 f 是 G- 模同构，此时称这两个表示是等价的或同构的.

又例如，对于紧群的表示，我们也有 Schur 引理.

3.5　Schur 引理　设 (V_1,ρ_1) 和 (V_2,ρ_2) 是紧群 G 的两个不可约 F- 表示.

(i) 若 f 是 V_1 到 V_2 的任一非零 G- 模映射，则 f 必为 G- 模同构; 从而若 V_1 与 V_2 不等价，则 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)=0$.

(ii) $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1)$ 是包含 F 的除环.

(iii) 若 $F=\mathbf{C}$, 则 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1)=F1_{V_1}\cong F$.

我们将抽象群表示的其它基本概念与结论在紧群表示中的类似物的准确描述留给读者，只要注意到在照搬过程中遇到 “群同态” 时应改为 “拓扑群的同态”, 不再一一赘述.

3.6　在 I.4.8 和习题 I.4.4 中我们看到，有限群的复表示和实表示分别是酉表示和正交表示. 这一重要结论在紧群中也是对的，它

是紧群表示中最基本的事实.

定理 (i) 紧群 G 的任一有限维复表示 (V,ρ) 是酉表示, 即存在 V 上的内积 $\langle -,-\rangle$ 使得

$$\langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle, \quad \forall g \in G,\ v_1, v_2 \in V.$$

(ii) 紧群 G 的任一有限维实表示 (V,ρ) 是正交表示, 即存在 V 上的内积 $\langle -,-\rangle$ 使得

$$\langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle, \quad \forall g \in G,\ v_1, v_2 \in V.$$

证 只证 (i). 将 (ii) 留作习题.

设 $u_1, \cdots, u_n$ 是 V 的一组基. 令 $(-,-)$ 是 V 上通常的内积, 即

$$\left(\sum_i a_i u_i, \sum_j b_j u_j\right) = \sum_i a_i \bar{b}_i.$$

对于 $g \in G, u = \sum\limits_i a_i u_i, v = \sum\limits_j b_j u_j$, 令

$$f_g(u,v) = (\rho(g)u, \rho(g)v).$$

则易验证 f_g 是 G 上的连续复值函数, 从而由不变积分的存在性可令

$$\langle u, v\rangle = \int_G f_g(u,v)\mathrm{d}g.$$

利用不变积分的性质直接可验证 $\langle -,-\rangle$ 是 V 上的内积, 即 V 对于 $\langle -,-\rangle$ 也作成酉空间. 再利用不变积分的不变性容易验证

$$\langle \rho(h)u, \rho(h)v\rangle = \langle u, v\rangle, \quad \forall h \in G.$$

从而 $\rho(h)$ 是 V 上的酉变换, $\forall h \in G$. □

3.7　推论　(i) 紧群的任一复表示均是完全可约表示.

(ii) 紧群的任一实表示均是完全可约表示.

证　只证 (i). (ii) 类似可证. 设 (V,ρ) 是紧群 G 的任一复表示， U 是其子表示. 令 $U^{\perp}$ 是 U 关于内积 $\langle -,- \rangle$ 的正交补. 则 $V=U\oplus U^{\perp}$. 只要证 $U^{\perp}$ 也是 G 的表示.

$\forall v\in U^{\perp}, g\in G$, 则 $\rho(g)v\in U^{\perp}$. 事实上, 因 $\rho(g)$ 是酉变换, 故有

$$\langle \rho(g)v, U\rangle = \langle v, \rho^{-1}(g)U\rangle = \langle v, U\rangle = 0. \qquad \square$$

3.8　推论　设 (V,ρ) 是紧群 G 的 n 维复表示, $\rho(g)=(a_{ij}(g))$, $\forall g\in G$. 则 $a_{ij}(g^{-1})=\overline{a_{ji}(g)}$,　$1\le i,\ j\le n$.

证　由 $\rho(g)$ 是酉矩阵及 $\rho(g^{-1})=\rho(g)^{-1}$ 即得. $\square$

习　　题

1. 证明定理 3.6 (ii).

2. Abel 紧群的不可约复表示均是 1 维的.

3. 写出紧群表示的 Schur 引理的矩阵形式.

4. 证明紧群 SO_2 的不可约复表示均是 1 维的.

5. 紧群 G 的两个 1 次表示 ρ 和 ρ' 是等价的, 当且仅当 $\rho(g)=\rho'(g)$, $\forall g\in G$.

6. 证明对于 Abel 紧群 G 的不可约表示 ρ 有 $|\rho(g)|=1$, $\forall g\in G$. [提示: 利用 ρ 是酉表示.]

§4　不可约表示的矩阵元的正交关系

本节总设 $F=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

4.1　用 $C(G,F)$ 表示 G 上连续 F- 值函数作成的 F- 空间. 对于 $f,g\in C(G,F)$, 定义

$$(f,g):=\int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,$$

其中 $\overline{g(x)}$ 是 $g(x)$ 的共轭复数.

由不变积分的性质知 $(-,-)$ 是 $C(G,F)$ 上的一个内积.

若 $(f,g)=0$, 则称 f 与 g 正交; 若 $(f,f)=1$, 则称 f 是规范的.

注　当 G 是有限离散紧群时, 上述 $(-,-)$ 与 II.2.1 中定义的 $(-,-)$ 本质上是一致的. 在 II.2.1 中我们用 $g(x^{-1})$ 而不是 $\overline{g(x)}$, 因为当时 F 是任一域; 对于复特征标, 这两者是一致的.

4.2　对于紧群 G 的 F- 表示 (V,ρ), 同样定义其特征标函数 χ_ρ. 对于 $\rho(g)=(a_{ij}(g))$, 由矩阵元 a_{ij} 的连续性知

$$\chi_\rho(g)=\mathrm{tr}\rho(g)=\sum_i a_{ii}(g),\quad \forall g\in G,$$

是 G 上的连续函数, 它具有与 II.1.2 中相同的基本性质 (除非 II.1.2 中标明只对有限群成立的性质). 特别地, 我们有

$$\begin{aligned}\chi_\rho(g^{-1})&=\mathrm{tr}\rho(g^{-1})=\mathrm{tr}\rho^{-1}(g)\\&=\mathrm{tr}(\overline{\rho(g)'})=\overline{\chi_\rho(g)}.\end{aligned}$$

因为紧群 G 的任一 F- 表示 (V,ρ) 均是完全可约的 (推论 3.7), 故其特征标 χ_ρ 是不可约 F- 特征标的和.

用 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 表示紧群 G 的所有互不同构的不可约 F- 表示作成的集合, 用 $\mathrm{Irr}_F G$ 表示 $\overline{\mathrm{Irr}}_F G$ 中所有表示的特征标的集合.

下述定理给出了紧群的不可约表示的矩阵元之间的正交关系.

4.3　定理　设 (V,ρ) 与 (U,φ) 是紧群 G 的两个不可约 F- 表示，其维数分别是 n 和 m. 令

$$\rho(g)=(a_{ij}(g)),\ \varphi(g)=(b_{ij}(g)),\quad \forall g\in G.$$

(i) 若 ρ 与 φ 不等价，则

$$(a_{ij},b_{kl}):=\int_G a_{ij}(g)\overline{b_{kl}(g)}\mathrm{d}g=0,$$
$$1\le i,\ j\le n,\ 1\le k,\ l\le m.$$

(ii) 设 $F=\mathbf{C}$. 则

$$(a_{ij},a_{kl}):=\int_G a_{ij}(g)\overline{a_{kl}(g)}\mathrm{d}g=\frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jl},$$
$$1\le i,j,k,l\le n.$$

证　首先规定一下记号. 若 $M(g)=(m_{ij}(g))$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 m_{ij} 均为紧群 G 上的连续 F- 值函数，则规定

$$\int_G M(g)\mathrm{d}g$$

是 $m\times n$ 矩阵，其 (i,j)- 处元素为 $\int_G m_{ij}(g)\mathrm{d}g$.

任取一个 $m\times n$ 复矩阵 C, 令

$$\widetilde{C}:=\int_G \varphi^{-1}(g)C\rho(g)\mathrm{d}g. \tag{*}$$

对于任一固定的 $x\in G$, 由不变积分的不变性有

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(x)\widetilde{C}\rho(x)&=\int_G \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(g)C\rho(g)\rho(x)\mathrm{d}g\\&=\int_G \varphi^{-1}(xg)C\rho(gx)\mathrm{d}g\\&=\int_G \varphi^{-1}(g)C\rho(g)\mathrm{d}g\\&=\widetilde{C}.\end{aligned}$$

这表明矩阵 $\widetilde{C}$ 给出了不可约表示 ρ 到不可约表示 φ 的一个表示同态.

现在取 C 为矩阵单位 e_{ki}.

(i) 若 ρ 与 φ 不等价, 则由 Schur 引理知 $\widetilde{C}=0$. 由定理 3.6 知

$$\varphi^{-1}(g)=\overline{\varphi(g)}'=(\overline{b_{ts}(g)}).$$

取矩阵等式

$$\widetilde{C}:=\int_G\varphi^{-1}(g)e_{ki}\rho(g)\mathrm{d}g=0$$

两边的 (l,j)- 处元, 即得

$$\begin{aligned}0&=\int_G\overline{b_{kl}(g)}a_{ij}(g)\mathrm{d}g\\&=\int_G a_{ij}(g)\overline{b_{kl}(g)}\mathrm{d}g\\&=(a_{ij},b_{kl}).\end{aligned}$$

由 i,j,k,l 的任意性即证得 (i).

(ii) 若 $F=\mathbf{C}$, 在 (*) 中将 $\varphi(g)$ 改成 $\rho(g)$, 则得到不可约复表示 ρ 的自同态. 从而由 Schur 引理知相应的 $\widetilde{C}$ 满足 $\widetilde{C}=\lambda 1_V$, $\lambda\in\mathbf{C}^*$, 其中 λ 可确定如下:

$$\begin{aligned}\lambda n=\mathrm{tr}(\widetilde{C})&=\int_G\mathrm{tr}(\rho^{-1}(g)C\rho(g))\mathrm{d}g\\&=\int_G\mathrm{tr}(C)\mathrm{d}g=\mathrm{tr}(C)\\&=\mathrm{tr}(e_{ki})=\delta_{ik}.\end{aligned}$$

再取矩阵等式 $\lambda 1_V=\widetilde{C}$ 两边的 (l,j)- 处元, 即得

$$\lambda\delta_{jl}=\int_G a_{ij}(g)\overline{a_{kl}(g)}\mathrm{d}g=(a_{ij},a_{kl}).$$

从而证得 (ii). □

注　若 G 是有限群, 则 G 是离散紧群, 因此上述定理就给出了有限群表示矩阵元间的如下正交关系 (这一点在 II.2 中并未指出):

(i) 若 ρ 与 φ 不等价, 则

$$(a_{ij},b_{kl}) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{ij}(g)\overline{b_{kl}(g)} = 0,$$
$$1 \le i,j \le n,\ 1 \le k,l \le m.$$

(ii) 若 $F = \mathbf{C}$, 则

$$(a_{ij},a_{kl}) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{ij}(g)\overline{a_{kl}(g)} = \frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jl},$$
$$1 \le i,j,k,l \le n.$$

下述定理给出了紧群的不可约特征标间的正交关系.

4.4　定理　设 (V,ρ) 与 (U,φ) 是紧群 G 的两个不可约 F- 表示, 其维数分别是 n 和 m, 特征标分别为 χ_ρ 和 χ_φ.

(i) 若 ρ 与 φ 不等价, 则

$$(\chi_\rho,\chi_\varphi) := \int_G \chi_\rho(g)\chi_\varphi(g^{-1})\mathrm{d}g = 0.$$

(ii) 若 $F = \mathbf{C}$, 则

$$(\chi_\rho,\chi_\rho) := \int_G \chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1})\mathrm{d}g = 1.$$

证　(i) 若 ρ 与 φ 不等价, 则由定理 4.3(i) 有

$$\begin{aligned}(\chi_\rho,\chi_\varphi) &= \int_G \chi_\rho(g)\chi_\varphi(g^{-1})\mathrm{d}g\\ &= \int_G \chi_\rho(g)\overline{\chi_\varphi(g)}\mathrm{d}g\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_G \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(g) \sum_{j=1}^{m} \overline{b_{jj}(g)} \mathrm{d}g \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_G a_{ii}(g) \overline{b_{jj}(g)} \mathrm{d}g \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(ii) 若 $F = \mathbf{C}$, 则由定理 4.3 (ii) 有

$$
\begin{aligned}
(\chi_\rho, \chi_\varphi) &= \int_G \chi_\rho(g) \chi_\rho(g^{-1}) \mathrm{d}g \\
&= \int_G \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} \mathrm{d}g \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} \int_G a_{ii}(g) \overline{a_{jj}(g)} \mathrm{d}g \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_G a_{ii}(g) \overline{a_{ii}(g)} \mathrm{d}g \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

□

利用紧群的不可约特征标间的正交关系，可以得到一些重要而有趣的推论，也再次表明紧群的表示与有限群表示的相似性 (但要注意一个重要的事实：紧群的不可约表示通常有无限多个).

4.5 推论 (i) $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G$ 是 $C(G, \mathbf{C})$ 中正交规范集. 特别地，$\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}} G$ 中元是 $\mathbf{C}$- 线性无关的.

(ii) $\mathrm{Irr}_{\mathbf{R}} G$ 是 $C(G, \mathbf{R})$ 中正交集. 特别地，$\mathrm{Irr}_{\mathbf{R}} G$ 中元是 $\mathbf{R}$-线性无关的.

4.6 推论 (表示等价的判别法) 设 ρ 与 φ 是紧群 G 的两个 F-表示. 则 ρ 与 φ 等价当且仅当 $\chi_\rho = \chi_\varphi$.

证　只需证充分性. 设 $\chi_\rho = \chi_\varphi$. 因 ρ 与 φ 均是完全可约的 (定理 3.6), 故有

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^{s} m_i\chi_i, \quad \chi_\varphi = \sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i,$$

其中 $m_i, n_i \geq 0$, χ_i 均为不可约特征标, 且 χ_i 与 χ_j 相应的不可约表示互不等价, $i \neq j$. 从而

$$(\chi_\rho, \chi_i) = m_i(\chi_i, \chi_i),$$
$$(\chi_\varphi, \chi_i) = n_i(\chi_i, \chi_i).$$

由不变积分的正定性知 $(\chi_i, \chi_i) > 0$. 故从 $\chi_\rho = \chi_\varphi$ 推出 $m_i = n_i$, $1 \leq i \leq s$, 即 ρ 与 φ 等价. □

由上述证明即知

4.7　推论 (不可约分解的重数)　设 ρ 是紧群 G 的任一 F- 表示. 则不可约表示 φ 在 ρ 中的重数为

$$\frac{(\chi_\rho, \chi_\varphi)}{(\chi_\varphi, \chi_\varphi)}.$$

特别地, 若 $F = \mathbf{C}$, 则这个重数为 $(\chi_\rho, \chi_\varphi)$.

4.8　推论 (不可约性判别法)　设 ρ 是紧群 G 的任一复表示. 则 ρ 不可约当且仅当 $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

证　必要性由定理 4.4 即知. 设 $\chi_\rho = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i\chi_i$ 是不可约分解. 则

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{i=1}^{s} m_i^2.$$

由此即推出充分性. □

习　题

1. 证明 3.3 例 2 中给出的 S^1 的表示是 S^1 的全部互不同构的不可约复表示. [提示：利用数学分析中的结论：不存在与所有 $e^{i2\pi nx}$, $n=0,1,\cdots$, 都正交的标准函数.]

§5 Peter-Weyl 定理

上一节我们已对紧群的不可约表示证明了类似于 II.2 中主要定理的正交关系. 自然的问题是, II.3 中 "有限群不可约复表示的特征标作成类函数空间的一组基" 在紧群中有无相似的结论？Peter-Weyl 定理给出了肯定的回答.

当我们考虑最简单和基本的紧群 S^1 时, 由函数分析知道, S^1 上任一连续复函数 f 均可展开成 Fourier 级数

$$f(\theta)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_n e^{in\theta},$$

其中 Fourier 系数为

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

因为 S^1 的不可约复表示均为 1 次的, 且 $e^{in\theta}$, $n\in\mathbf{Z}$, 是 S^1 的互不等价的不可约复表示的全部矩阵元, 故可用紧群表示的语言将上述 Fourier 定理重新叙述成：

紧群 S^1 上的任一连续复函数 f 均可由 S^1 的全体互不等价的不可约复表示的矩阵元一致逼近.

Fourier 定理在理论和在实践上均具有重要的意义, 而 Peter-Weyl 定理则可视为这一定理的自然推广.

5.1 设 G 是紧群， $C(G,\mathbf{C})$ 是 G 上连续复值函数的集合. 则 $C(G,\mathbf{C})$ 对于内积

$$(f,g) := \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

作成度量空间. 另一方面， $C(G,\mathbf{C})$ 对于距离

$$\|f-g\|_{\sup} := \sup_{x\in G}|f(x)-g(x)|$$

也作成度量空间. 显然有

$$\|f-g\|_{C(G,\mathbf{C})} := \sqrt{(f-g,f-g)} \le \|f-g\|_{\sup}. \qquad (*)$$

定义 设 G 是紧群， Δ 是复内积空间 $C(G,\mathbf{C})$ 中可数或有限多个两两正交的非零函数的集合. Δ 称为完备的，如果对于 G 上的任一连续复值函数 f 和任一正数 ε, 均有复数 $c_1,\cdots,c_n$ 和 $f_1,\cdots,f_n\in\Delta$ 使得

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x\in G.$$

由 (*) 即知，若 Δ 是 $C(G,\mathbf{C})$ 中的一个正交完备集，则 Δ 张成的子空间在 $C(G,\mathbf{C})$ 中稠密 (对于 $C(G,\mathbf{C})$ 的上述内积作成的拓扑而言).

5.2 命题 设 G 是紧群， Δ 是 $C(G,\mathbf{C})$ 中的正交完备集， $f\in C(G,\mathbf{C})$. 则对任一 $\varepsilon>0$, 存在 $f_1,\cdots,f_n\in\Delta$ 使得

$$\left\|f-\sum_{i=1}^n a_i f_i\right\|_{C(G,\mathbf{C})} < \varepsilon,$$

其中 a_i 是 f 关于 Δ 的 Fourier 系数，即

$$a_i = \frac{(f,f_i)}{(f_i,f_i)}, \quad i=1,\cdots,n.$$

证 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. 由完备性的定义知存在复数 $c_1, \cdots, c_n$ 和 $f_1, \cdots, f_n \in \Delta$ 使得

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right| < \varepsilon', \quad \forall x \in G.$$

从而

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right\|_{\sup} \leq \varepsilon' < \varepsilon,$$

由 (*) 即知

$$\left(f - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i,\ f - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right) < \varepsilon^2.$$

另一方面

$$\begin{aligned}
&\left(f - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i,\ f - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right) \\
&= (f, f) - \sum_{i=1}^{n} (f_i, f_i) \bar{c}_i a_i - \sum_{i=1}^{n} (f_i, f_i) c_i \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{n} (f_i, f_i) c_i \bar{c}_i \\
&= (f, f) - \sum_{i=1}^{n} (f_i, f_i) a_i \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{n} (f_i, f_i)(a_i - c_i)(\bar{a}_i - \bar{c}_i) \\
&\geq (f, f) - \sum_{i=1}^{n} (f_i, f_i) a_i \bar{a}_i \\
&= \left(f - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i,\ f - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right).
\end{aligned}$$

因此

$$\left(f - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i,\ f - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right) < \varepsilon^2.$$

即

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\|_{C(G,\mathbb{C})} < \varepsilon.$$

□

5.3 推论 设 G 是紧群，Δ 是 $C(G,\mathbf{C})$ 中的正交完备集，$0 \neq f \in C(G,\mathbf{C})$. 若 f 与 $\Delta - \{f\}$ 中任一元均正交，则 $f \in \Delta$.

证 否则，$a_n = (f, f_n) = 0$, $\forall f_n \in \Delta$. 故由命题 5.2 知

$$\|f\|_{C(G,\mathbf{C})} < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

从而推出 $f = 0$, 矛盾. □

5.4 Peter-Weyl 定理 设 G 是紧群. 则 G 的所有互不等价的有限维不可约复表示的矩阵元作成的集合是 $C(G,\mathbf{C})$ 的完备正交集，且任意一个矩阵元与自己的内积等于 $\frac{1}{n}$, 其中 n 是相应的不可约表示的维数.

由 §4, 只要证明定理中的完备性部分. 这里我们不打算给出其证明，可参见 [P], p.246.

5.5 推论 设 G 是紧群，$g \neq h \in G$. 则存在 G 的有限维不可约复表示 ρ 使得 $\rho(g) \neq \rho(h)$. 特别地，若 $g \neq 1$, 则存在 G 的有限维不可约复表示 ρ 使得 $\rho(g)$ 不是单位阵.

证明可参见 [P], p.251.

5.6 定理 设 G 是紧群. 则 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$ 是 G 上连续类函数空间的正交完备规范集.

证 在 §4 中已证明 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$ 是 G 上连续类函数空间的正交规范集，只需证明其完备性部分，即对于 G 上任一连续类函数 f 和任一 $\varepsilon > 0$, 均存在复数 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $\chi_1, \cdots, \chi_n \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$ 使得

$$\left| f(x) - \sum_{m=1}^{n} a_m \chi_m(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in G. \qquad (**)$$

令 Δ 是 G 的所有互不等价的有限维不可约复表示的矩阵元作成的集合. 我们断言，为了证明完备性，只要证明：对于任一 G

上的连续类函数 $q(x)$, 其中 $q(x)$ 可以表成 Δ 中有限个元的复线性组合, 则存在复数 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $\chi_1,\cdots,\chi_n \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 使得

$$q(x)=\sum_{m=1}^{n}a_m\chi_m(x).$$

事实上, 由 Peter-Weyl 定理知存在 Δ 中有限个元的复线性组合 $g(x)$ 使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in G.$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\int_G f(axa^{-1})\mathrm{d}a-\int_G g(axa^{-1})\mathrm{d}a\right|\\&=\left|\int_G \left(f(axa^{-1})-g(axa^{-1})\right)\mathrm{d}a\right|\\&\le\int_G |f(axa^{-1})-g(axa^{-1})|\mathrm{d}a\\&\le\varepsilon\int_G \mathrm{d}a\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $q(x)=\int_G g(axa^{-1})\mathrm{d}a$. 因 f 是 G 上的类函数, 故 $f(x)=\int_G f(x)\mathrm{d}a=\int_G f(axa^{-1})\mathrm{d}a$, 从而上式可写成

$$|f(x)-q(x)|<\varepsilon.$$

由不变积分的不变性知 $q(x)$ 是 G 上的 (连续) 类函数. 因 $g(x)$ 是 Δ 中有限个元的复线性组合, 故 $q(x)$ 也是. (事实上, 因 $g(x)$ 是 Δ 中有限个元的复线性组合, 故存在 $\rho_m(x)=(a_{ij}^{(m)}(x))\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{C}}G$, $m=1,\cdots,n$, 和复数 $c_{ijm}, m=1,\cdots,n$, 使得

$$g(x)=\sum_{i,j,m}c_{ijm}a_{ij}^{(m)}(x).$$

因为 $\rho_m(axa^{-1})$ 与 $\rho_m(x)$ 是相似的矩阵，故 $g(axa^{-1})$ 作为 x 的函数仍可由 $a_{ij}^{(m)}(x)$ 线性表出，从而 $q(x)=\int_G g(axa^{-1})\mathrm{d}a$ 也是 Δ 中有限个元的复线性组合.）因此，由题设知 $q(x)$ 具有下述形式：

$$q(x)=\sum_{m=1}^{n}a_m\chi_m(x),$$

这就得到 (**).

现在设 $q(x)$ 是 G 上连续类函数且 $q(x)$ 是 Δ 中有限个元的复线性组合，即存在 $\rho_m(x)=(a_{ij}^{(m)}(x))\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathrm{C}}G$, $m=1,\cdots,n$, 和复数 $c_{ijm}, m=1,\cdots,n$, $1\leq i,j\leq d_m$, 其中 d_m 是不可约表示 ρ_m 的次数，使得

$$\begin{aligned}q(x)&=\sum_{i,j,m}c_{ijm}a_{ij}^{(m)}(x)\\&=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i,j}c_{ijm}a_{ij}^{(m)}(x)\\&=\sum_{m=1}^{m}p_m(x).\end{aligned}$$

因为 $q(x)$ 是类函数，故每个 $p_m(x)$ 也是类函数．事实上，因为 $\rho_m(axa^{-1})$ 与 $\rho_m(x)$ 是相似的矩阵，故每个 $p_m(axa^{-1})$ 作为 x 的函数仍可由 $a_{ij}^{(m)}(x)$ 线性表出，从而由等式

$$q(axa^{-1})=\sum_{m=1}^{n}p_m(axa^{-1})=q(x)=\sum_{m=1}^{n}p_m(x)$$

和 Δ 中元的线性无关性即可得出

$$p_m(axa^{-1})=p_m(x),\quad 1\leq m\leq n.$$

而由 $\rho_m(axa^{-1}) = \rho_m(a)\rho_m(x)\rho_m(a^{-1})$ 即知

$$\begin{aligned}p_m(axa^{-1}) &= \sum_{i,j} c_{ijm} a_{ij}^{(m)}(axa^{-1}) \\ &= \sum_{i,j,k,l} c_{ijm} a_{ik}^{(m)}(a) a_{kl}^{(m)}(x) a_{lj}^{(m)}(a^{-1}) \\ &= \sum_{i,j,k,l} c_{ijm} a_{ik}^{(m)}(a) a_{lj}^{(m)}(a^{-1}) a_{kl}^{(m)}(x).\end{aligned}$$

比较 $a_{kl}^{(m)}(x)$ 在 $p_m(axa^{-1})$ 中的系数和在 $p(x)$ 中的系数，并由 Δ 中元的线性无关性，即得到

$$c_{klm} = \sum_{i,j} a_{ik}^{(m)}(a) c_{ijm} a_{lj}^{m}(a^{-1}).$$

令 $C_m := (c_{ijm})'$. 则得到上式的矩阵形式

$$C_m = \rho_m(a^{-1}) C_m \rho_m(a), \quad \forall a \in G.$$

从而由 Schur 引理即知 $C_m = a_m I$, I 为单位阵， $a_m \in \mathbf{C}$.

于是

$$\begin{aligned}q(x) &= \sum_{i,j} c_{ijm} a_{ij}^{(m)}(x) \\ &= \sum_{l} a_m a_{ll}^{(m)}(x) \\ &= a_m \chi_m(x),\end{aligned}$$

其中 χ_m 是 ρ_m 的特征标．这就完成了定理的证明． □

5.7 推论 设 G 是紧群， g 和 h 是 G 中两个不共轭的元．则存在 G 的有限维不可约复表示的特征标 χ 使 $\chi(g) \neq \chi(h)$.

证明参见 [P], p.253.

类似于推论 5.3, 我们有

5.8　推论　设 G 是紧群，Δ 是 G 上连续类函数空间的一个正交完备集，f 是 G 上非零连续类函数．若 f 与 $\Delta - \{f\}$ 中任一元均正交，则 $f \in \Delta$．

5.9　推论　设 G 是紧群，Δ 是 $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$ 的一个子集且 Δ 是 G 上连续类函数空间的一个正交完备集．则 $\Delta = \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}G$．

§6　SU_2 与 SO_3 的复表示

本节我们讨论最简单而又"非平凡"的紧群 SU_2 和 SO_3 的复表示．根据紧群表示的完全可约性，只要研究其不可约复表示．

回顾 SU_2 是行列式为 1 的 2 阶酉阵的乘法群，因此

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \middle| \ z_1, z_2 \in \mathbf{C},\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

令

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \middle| \ z_1, z_2 \in \mathbf{C} \right\}.$$

熟知 $\mathbf{H}$ 即为 Hamilton 四元数 (可除) 代数．它是 $\mathbf{R}$ 上以

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad e_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

为基的 4 维向量空间．设 $M = \sum_{i=0}^{3} x_i e_i$，$N = \sum_{i=0}^{3} y_i e_i$．定义

$$(M, N) := x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

则 $(-,-)$ 是 $\mathbf{H}$ 上的内积，$\mathbf{H}$ 对于 $(-,-)$ 作成 4 维欧氏空间. 直接验证即知 $A\in SU_2$ 当且仅当 $A\in\mathbf{H}$ 且 $(A,A)=1$. 由此即得

6.1 引理 SU_2 恰为单位球面 S^3. 特别地，SU_2 是连通的紧群.

6.2 定理 存在抽象群的同构

$$SO_3\cong SU_2/\{I,-I\}.$$

为了证明这一定理，需要做若干准备. 令

$$E=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2+\mathrm{i}x_3\\ x_2-\mathrm{i}x_3 & -x_1\end{pmatrix}\;\middle|\; x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}.$$

则 E 是 $\mathbf{R}$ 上以

$$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$$

为基的 3 维向量空间.

设 $X=x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3$，$Y=y_1X_1+y_2X_2+y_3X_3$. 定义

$$(X,Y):=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

则 E 是关于上述内积 $(-,-)$ 的 3 维欧氏空间. 令

$$\begin{aligned}\rho: SU_2 &\longrightarrow GL(E),\\ A &\longmapsto \rho(A),\end{aligned}$$

其中

$$\rho(A)X:=AXA^{-1},\quad \forall X\in E.$$

则容易验证 ρ 是 SU_2 到 $GL(E)$ 的拓扑群同态. 对于任一 $X\in E$ 有

$$(X,X)=x_1^2+x_2^2+x_3^2=-\det(X).$$

因此，对于任一 $A \in SU_2$ 有

$$
\begin{aligned}
(\rho(A)X, \rho(A)X) &= (AXA^{-1}, AXA^{-1}) \\
&= -\det(AXA^{-1}) \\
&= -\det(X) \\
&= (X, X).
\end{aligned}
$$

这表明 $\rho(A)$ 是 E 的正交变换. 从而 $\rho(A) \in O_3$，$\det(\rho(A)) \in \{1, -1\}$，$\forall A \in SU_2$.

我们断言 $\det(\rho(A)) = 1$；从而 $\rho(A) \in SO_3$，$\forall A \in SU_2$.

(事实上，由引理 6.1 知 SU_2 是连通的，而 $\rho: SU_2 \to GL(E)$ 与 $\det: GL(E) \to \mathbf{R}^*$ 均为连续映射，因此 $\mathrm{Im}(\det \cdot \rho)$ 也连通，从而 $\det(\rho(A)) = 1$，$\forall A \in SU_2$.)

由此即得到

6.3　引理　存在拓扑群同态 $\rho: SU_2 \longrightarrow SO_3$.

为了证明 ρ 是满射，我们需要如下两个引理：

6.4　引理　设 H 是 SO_3 的子群，满足下述性质：

(i) H 可迁地作用在单位球面 S^2 上，即任取 $\mathbf{R}^3$ 中的单位向量 α 和 β, 存在 $f \in H$ 使得 $f(\alpha) = \beta$;

(ii) 存在一根轴使得 H 包含绕这根轴的所有旋转，

则 $H = SO_3$.

证　注意 SO_3 恰是 $\mathbf{R}^3$ 中所有旋转作成的群. 设 H 包含了绕轴 $\langle e \rangle$ 的所有旋转且 $|e| = 1$. 对于任一 $g \in SO_3$, 由 (i) 知存在 $f \in H$ 使得

$$fe = ge.$$

从而 $f^{-1}ge = e$. 故 $f^{-1}g$ 是绕轴 $\langle e \rangle$ 的一个旋转. 由 (ii) 即知 $f^{-1}g \in H$, 于是 $g \in H$. □

6.5 引理 设 $0 \neq X \in E$. 则存在 $A \in SU_2$ 使得

$$AXA^{-1} = cX_1,$$

其中 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $c > 0$. 特别地, 若 X 为单位向量, 则 $c = 1$.

证 因为 X 是迹为零的 Hermite 对称阵, 故 X 酉相似于一个迹为零的实对角阵, 即存在 2 阶酉阵 B 使得

$$BXB^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad c > 0.$$

令 $A = (\det(B))^{-\frac{1}{2}} \cdot B$. 则 $\det(A) = 1$, 且有

$$\begin{aligned} A\overline{A}' &= (\det(B))^{-\frac{1}{2}} \cdot B \cdot (\overline{\det(B)})^{-\frac{1}{2}} \cdot \overline{B}' \\ &= |\det(B)|^{-1} I = I, \end{aligned}$$

其中用到了酉阵 B 的行列式的模长为 1. 这表明 $A \in SU_2$, 而且

$$AXA^{-1} = BXB^{-1} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ □

6.6 定理 6.2 的证明 为了证明 $\rho: SU_2 \to SO_3$ 是满射, 只要证明 $\mathrm{Im}\rho$ 满足引理 6.4 中的条件 (i) 和 (ii).

设 X 与 Y 是 E 中的两个单位向量. 则由引理 6.5 知存在 $A \in SU_2$ 使得 $AXA^{-1} = Y$, 即 $\rho(A)X = Y$. 即 $\mathrm{Im}\rho$ 满足条件 (i).

为了验证条件 (ii), 我们要计算 $\rho(A(\theta))$, 其中

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix} \in SU_2, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

对于任一 $X \in E$ 有

$$\begin{aligned} \rho(A(\theta))X &= A(\theta)XA^{-1}(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}(x_2 + \mathrm{i}x_3) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}(x_2 - \mathrm{i}x_3) & -x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{*}$$

从而 $\rho(A(\theta))$ 在基 X_1、X_2, X_3 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

这表明 $\rho(A(\theta))$ 是绕轴 $\langle X_1\rangle$、转角为 2θ 的旋转．当 θ 取遍实数时，$\rho(A(\theta))$ 就给出了绕 $\langle X_1\rangle$ 的所有旋转，从而 $\mathrm{Im}\rho$ 满足条件 (ii).

剩下只要证明 $\mathrm{Ker}\rho = \{I, -I\}$．显然 $\{I, -I\} \subseteq \mathrm{Ker}\rho$．设 $A \in \mathrm{Ker}\rho$. 则 $\rho(A) = 1_E$．特别地，有

$$\rho(A)X_1 = AX_1A^{-1} = X_1,$$

这推出 A 是对角阵，即 $A = A(\theta)$．再由 (*) 式和 $\rho(A(\theta)) = 1_E$ 即知 $e^{i2\theta} = 1$, $e^{i\theta} = \pm 1$, 即 $A = \pm I$. □

注　上述证明并未断言 ρ 是开映射，因此定理 6.2 中的群同构只是抽象群的同构.

现在我们来构造 SU_2 的一组不可约复表示.

设 V_n 是两个变元 x 与 y 的 n 次齐次复系数多项式的集合．则 V_n 是以 x^ky^{n-k}, $k = 0, 1, \cdots, n$, 为基的 $n+1$ 维复空间．令

$$\begin{aligned} \Phi_n : SL_2(\mathbf{C}) &\longrightarrow GL(V_n), \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &\longmapsto \Phi_n(A), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} (\Phi_n(A)f)(x, y) &:= f(a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y) \\ &= f((x, y)A), \quad \forall f \in V_n. \end{aligned}$$

则易证

(i) $\Phi_n(A) \in GL(V_n)$.

(ii) $\Phi_n(AB) = \Phi_n(A)\Phi_n(B)$.

(iii) Φ_n 是连续映射.

例如，为了看出 (iii), 注意到

$$\Phi_n(A)(x^k y^{n-k}) = (a_{11}x + a_{21}y)^k(a_{12}x + a_{22}y)^{n-k}.$$

从而 $\Phi_n(A)$ 在基 $x^k y^{n-k}$ 下的矩阵元素是关于 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 的多项式，于是 Φ_n 是连续映射.

将 Φ_n 限制在子群 SU_2 上即得到 SU_2 的一组复表示

$$(V_n, \Phi_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

6.7 引理 (V_n, Φ_n) 是 SU_2 的两两互不等价的不可约复表示，$n = 0, 1, 2, \cdots$.

证 设 W 是 V_n 的子表示. 令

$$T = \left\{ A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbf{C},\ |\alpha| = 1 \right\}.$$

则 T 是 SU_2 的子群. 于是 $TW \subseteq W$. 因

$$\Phi_n(A(\alpha))(x^k y^{n-k}) = \alpha^{2k-n} x^k y^{n-k}.$$

故 $\mathbf{C}x^k y^{n-k}$ 均为 V_n 的 1 维 T- 不变子空间且

$$V_n = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \mathbf{C}x^k y^{n-k}.$$

于是 V_n 作为子群 T 的表示是完全可约的，从而 W 作为 T 的表示是某些 $\mathbf{C}x^r y^{n-r}$ 的和. （事实上，设 U 是 W 的关于 T 的

不可约子表示, $p_i: U \to \mathbf{C}x^iy^{n-i}$ 是投影映射. 若 $p_i \neq 0$, 则 $U \cong \mathbf{C}x^iy^{n-i}$. 由于 $\mathbf{C}x^iy^{n-i}$, $i = 0, 1, \cdots, n$, 作为 T 的表示是两两互不同构的, 从而 $U = \mathbf{C}x^iy^{n-i}$.)

设 $x^ry^{n-r} \in W$. 则

$$\begin{aligned} f := \Phi_n\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\right)(x^ry^{n-r}) \\ = (\alpha x - \overline{\beta}y)^r(\beta x + \overline{\alpha}y)^{n-r} \in W. \end{aligned}$$

因 W 是某些 $\mathbf{C}x^sy^{n-s}$ 的和, $f \in W$ 且 f 有一非零项 $\alpha^r\beta^{n-r}x^n$, 故 $x^n \in W$. 又因

$$\Phi_n\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\right)x^n = (\alpha x - \overline{\beta}y)^n \in W,$$

同理可知对任一 k 有 $x^ky^{n-k} \in W$, 即 $W = V_n$. □

因为 $SO_3 \cong SU_2/\{I, -I\}$, 故 SU_2 的不可约表示 (V_n, Φ_n) 能够自然地成为 SO_3 的不可约表示当且仅当 $\mathrm{Ker}\Phi_n \supsetneqq \{I, -I\}$. 而 $\mathrm{Ker}\Phi_n \supseteq \{I, -I\}$ 当且仅当 $\Phi_n(-I) = 1_{V_n}$. 因

$$(\Phi_n(-I)f)(x, y) = f(-x, -y) = (-1)^nf(x, y),$$

故 $\Phi_n(-I) = 1_V$ 当且仅当 n 为偶数. 由此即得

6.8　引理　(V_{2n}, Φ_{2n}), $n = 0, 1, 2, \cdots$, 是 SO_3 的两两互不等价的不可约复表示.

为了证明在引理 6.7 和引理 6.8 中给出的表示分别是 SU_2 和 SO_3 的全部的互不等价的不可约复表示, 我们需要如下引理:

6.9　引理　设 $C_0(S^1)$ 是单位圆周 S^1 上满足

$$f(\alpha) = f(\overline{\alpha}), \quad \forall \alpha \in S^1,$$

的连续复值函数作成的 $C(S^1,\mathbf{C})$ 的子空间， P 是 α 和 $\overline{\alpha}$ 的多项式 p 的集合，满足

$$p(\alpha,\overline{\alpha})=p(\overline{\alpha},\alpha),\quad \forall\alpha\in S^1.$$

则 P 在 $C_0(S^1)$ 中稠密 (对于 $C(S^1,\mathbf{C})$ 中的度量).

这一引理是 Stone-Weierstrass 定理的一种特殊情况. 它在许多函数分析的书上均可找到.

6.10　定理　我们有

$$\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbf{C}}(SU_2)=\{(V_n,\Phi_n)\mid n=0,1,2,\cdots\};$$
$$\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbf{C}}(SO_3)=\{(V_{2n},\Phi_{2n})\mid n=0,1,2,\cdots\}.$$

证　显然只要证第一个等式. 为此只需证明 Φ_n 的特征标 χ_n, $n=0,1,2,\cdots$, 作成 SU_2 的连续类函数空间的完备集 (推论 5.9).

首先，我们断言 SU_2 上任一类函数 f 由其在对角阵 $A(\alpha)$ 作成的子群 T 上的限制唯一确定，且 $f(A(\alpha))=f(A(\overline{\alpha}))$.

事实上，对于任一 $B\in SU_2$, 由线性代数知存在酉阵 U_1 使得

$$U_1BU_1^{-1}=A(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\overline{\alpha}\end{pmatrix},$$

其中 $|\alpha|=1$. 令 $U=(\det(U_1))^{-\frac{1}{2}}\cdot U_1$. 则 $U\in SU_2$, 且

$$UBU^{-1}=A(\alpha)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A(\overline{\alpha})\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}.$$

这就证明了上述断言.

其次，计算 χ_n 在 T 上的限制. 设 $A(\alpha)=\mathrm{diag}\{\alpha,-\overline{\alpha}\}\in T$, 其中 $|\alpha|=1$.

因

$$\Phi_n(A(\alpha))(x^k y^{n-k}) = \alpha^{2k-n} x^k y^{n-k},$$

故

$$\chi_n(A(\alpha)) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k-n} = \overline{\alpha}^n \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} = \frac{\alpha^{n+1} - \overline{\alpha}^{n+1}}{\alpha - \overline{\alpha}}.$$

令 $\xi_n(\alpha) = \chi_n(A(\alpha))$. 特别地, $\xi_0 = 1$, $\xi_1(\alpha) = \alpha + \overline{\alpha}$. 下证: $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots$ 张成的复空间 W 恰为引理 6.9 中的 P. 显然, $\xi_n \in P$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 设 $p \in P$. 因 $p(\alpha) = p(\overline{\alpha})$, $\forall \alpha \in S^1$, 故 p 是 α 与 $\overline{\alpha}$ 的对称多项式, 从而 p 可表成 α 和 $\overline{\alpha}$ 的基本对称多项式

$$\xi_1 = \alpha + \overline{\alpha}$$

和

$$\xi_0 = \alpha\overline{\alpha} = 1$$

的多项式, 即 p 是 ξ_1 的多项式. 利用数学归纳法可证 $\xi_1^n \in W$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 从而 $P = W$.(事实上, 因 $\xi_1^{n+1} = \xi_1^n \xi_1$, 只要说明对于任一 m, $\xi_m \xi_1 \in W$ 即可. 因 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, 故

$$\begin{aligned}
\xi_m \xi_1 &= \frac{\alpha^{m+1} - \overline{\alpha}^{m+1}}{\alpha - \overline{\alpha}}(\alpha + \overline{\alpha}) \\
&= \frac{\alpha^{m+2} - 2\overline{\alpha}^{m+2}}{\alpha - \overline{\alpha}} + \frac{(\alpha^m - \overline{\alpha}^m)\alpha\overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}} \\
&= \xi_{m+1} + \xi_{m-1} \in W.\ )
\end{aligned}$$

由引理 6.9 知 W 在 $C_0(S^1)$ 中稠密, 即 S^1 上任一满足 $f(\alpha) = f(\overline{\alpha})$ 的连续复值函数 f 可由 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots$ 一致逼近. 又因 SU_2 上任一连续类函数 f 由其在对角子群 T 上的限制唯一确定, 而这个限制是 S^1 上满足 $f(\alpha) = f(\overline{\alpha})$ 的连续函数, 故 f 可由 $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \cdots$ 一致逼近, 即 $\{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \cdots\}$ 是 SU_2 的连续类函数空间的完备集. □

参 考 文 献

[A] M. A. Armstrong 著. 孙以丰译, 李同孚校. 基础拓扑学. 北京: 北京大学出版社, 1983

[AB] J. L. Alperin, R. B. Bell. Groups and Representations. GTM 162. Springer-Verlag, 1995

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smaϕ. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics (36). Cambridge University Press, 1995

[CR1] C. W. Curtis, I. Reiner. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. New York: John Wiley & Sons, 1962

[CR2] C. W. Curtis, I. Reiner. Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders(1). New York: John Wiley & Sons, 1981

[CS] 曹锡华, 时俭益. 有限群表示论. 北京: 高等教育出版社, 1992

[CY] 曹锡华, 叶家琛. 群表示论. 北京: 北京大学出版社, 1998

[D] Yu. 德洛兹德, B. B. 基里钦柯著. 刘绍学, 张英伯译. 有限维代数. 北京: 北京师范大学出版社, 1984

[F] W. Feit. The Representation Theory of Finite Groups. North-Holland Publishing Company, 1982

[FLZ] 冯克勤，李尚志，查建国．近世代数引论．合肥：中国科学技术大学出版社，1988

[H] 华罗庚．数论导引．北京：科学出版社，1979

[Huang] J. S. Huang. Lectures on Representation Theory. World Scientific, 1999

[I] I. M. Isaacs. Character Theorey of Finite Groups. New York: Academic Press, 1976

[Jac] N. Jacobson. Basic Algebra (II). W. H. Freeman and Company, 1980

[J] 江泽涵．拓扑学引论．上海：上海科学技术出版社，1979

[L] 刘绍学．环与代数．北京：科学出版社，1983

[Lam] T. Y. Lam (林节玄) 著．丘维声译，冯绪宁校．有限群表示一百年 (I)．数学译林，1999, 18(1)

[LF] 黎景辉，冯绪宁．拓扑群引论．北京：科学出版社，1991

[P] L. S. Pontryagin 著．曹锡华译．连续群 (上册)．北京：科学出版社，1978

[Q] 丘维声．有限群和紧群的表示论．北京：北京大学出版社，1997

[R] C. M. Ringel. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. Lecture Notes in Math. (1099). Berlin: Springer-Verlag, 1994

[S] J. P. Serre. Linear Representations of Finite Groups. GTM 42. Springer-Verlag, 1927 (中译本：郝炳新译. 北京：科学出版社，1984)

[Sim] B. Simson. Representations of Finite and Compact Groups. GSM 10. Amer. Math. Soc., 1996

[V1] B. L. Van der Waerden 著. 丁石孙，曾肯成，郝炳新译，万哲先校. 代数学 (I). 北京：科学出版社，1955

[V2] B. L. Van der Waerden 著. 丁石孙，曾肯成，郝炳新译，万哲先校. 代数学 (II). 北京：科学出版社，1976

[Vin] E. B. Vinberg. Linear Representions of Groups. Birkhäuser-Verlag, 1989

[XHM] 项武义，侯自新，孟道骥. 李群讲义. 北京：北京大学出版社，1992

[YX] 严志达，许以超. Lie 群及其 Lie 代数. 北京：高等教育出版社，1985

[Z] 张广祥. 有限群模表示论. 重庆：西南师范大学出版社，1993

汉英名词索引

一 画

三 画

四 画

五 画

九　画